Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. R. Haindl

Übungsblatt 7

Ausgabe: 5.12.2022 – Abgabe: 12.12.2022 12:00

Saalübung: 13.12.2022 – Tutorium: 14.12.2022

Aufgabe 1: Potential einer Kugel (4 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass im Fall der azimuthalen Symmetrie sich die Laplace-Gleichung in sphärischen Koordinaten durch Separation der Variablen lösen lässt,

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \tag{1.1}$$

Hierin sind A_l und B_l Konstanten und P_l ist das Legendre-Polynom l-ter Ordnung. Die Legendre-Polynome sind orthogonal,

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta = \frac{2\,\delta^{ll'}}{2l+1}\,. \tag{1.2}$$

(a) Nehmen Sie an, das Potential einer Kugel mit Radius R sei konstant auf ihrer Oberfläche, $\varphi = \varphi_0$. Bestimmen Sie mithilfe der Gleichung (1.1) das Potential innerhalb und außerhalb der Kugel. Das heißt, Sie müssen A_l und B_l berechnen.

(b) Bestimmen Sie das Potential einer Kugelschale, die eine gleichförmige Ladung σ_0 auf der Oberfläche trägt. *Hinweis:* Benutzen Sie geeignete Randbedingungen an der Oberfläche.

(c) Statt einer konstanten Ladung trägt die Kugelschale jetzt eine Flächenladung $\sigma = k\cos\theta$. Drücken Sie die Volumenladung $\rho(\vec{r})$ als eine Delta-Funktion aus. Bestimmen Sie jetzt das Potential dieser Kugelschale.

(d) Bestimmen Sie das Dipolmoment,

$$\vec{p} = \int \vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}^3r'\,, \tag{1.3}$$

dieser Ladungsverteilung. Berechnen Sie schliesslich das Dipolpotential.

Aufgabe 2: Multipolentwicklung (2 Punkte)

Eine Kugel mit Radius, R, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, trägt die Ladungsdichte

$$\rho(r,\theta) = k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta\,. \tag{2.1}$$

Darin ist k eine Konstante.

(a) Bestimmen Sie nährungsweise das Potential (bis zur führenden nicht-trivialen Ordnung) für Punkte auf der z-Achse, die sich in großer Entfernung von der Kugel befinden.

Aufgabe 3: Polarisierbarkeit des Wasserstoffatoms (4 points)

(a) Betrachten Sie ein einfaches Modell des Wasserstoffatoms; ein Kern mit einer Punktladung $+e$ ist von einer Elektronenwolke mit der Ladung $-e$ und mit dem Radius a umgeben, wobei a der Bohrsche Radius $a \sim 5\cdot 10^{-11}\text{m} = 0.5\text{Å}$ ist. In der Gegenwart eines externen elektrischen Feldes $\vec{E}$ entwickelt das Atom ein kleines Dipolmoment $\vec{p}$. In der Regel ist ein solches Dipolmoment proportional zum externen Feld entsprechend dem Zusammenhang $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, wobei α die Polarisierbarkeit des Atoms ist. Berechnen Sie α.

(b) Wir können unser Modell verfeinern indem wir, gemäß der Quantenmechanik, betrachten, dass die Elektronenwolke eines Wasserstoffatoms im Grundzustand die Ladungsdichte

$$\rho(r) = \frac{-e}{\pi a^3}\, e^{-2r/a} \tag{3.1}$$

hat, wobei r die Distanz zum Zentrum des Atoms ist.

(i) Finden Sie das elektrische Feld der Elektronenwolke $E_e(r)$, wobei $r < a$. *[Hinweis: ein ähnliches Problem ist bereits in Übungsblatt 3 diskutiert worden.]*

(ii) Angenommen, dass die Verschiebung des Kerns im Vergleich zum Bohr Radius vernachlässigbar ist, $d \ll a$, finden Sie die Polarisierbarkeit α des Atoms.

(c) Nehmen Sie nun an, dass die Ladungsdichte der Elektronenwolke bis zu einem Radius R proportional zur Distanz zum Zentrum ist, $\rho(r) = Ar$, wobei A eine Konstante ist.

(i) Finden Sie das elektrische Feld $E_e(r)$, welches durch die Elektronenwolke für $r < a$ erzeugt wird.

(ii) Drücken Sie die Verschiebung des Kerns durch das elektrische Feld E aus. Bestimmen Sie den Exponenten von E, zu dem das Dipolmoment p proportional ist.