Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. R. Haindl

Übungsblatt 12

Ausgabe: 23.1.2023 – Abgabe: 30.1.2023 12:00

Saalübung: 31.1.2023 – Tutorium: 1.2.2023

Aufgabe 1: Draht mit Spalt (3 Punkte)

Ein dicker Draht mit Radius a trägt einen konstanten Strom, der gleichförmig auf seinem Querschnitt verteilt ist. Ein enger Spalt im Draht mit Breite $w \ll a$ bildet den in Abbildung 1 dargestellten Plattenkondensator.

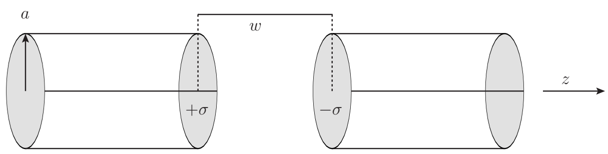

Abbildung 1: dicker Draht mit Radius a, mit einem engen Spalt der Breite $w \ll a$.

(a) Bestimmen Sie das elektrische und magnetische Feld in der Lücke bei Abständen $s < a$ von der Achse zur Zeit t. Ignorieren Sie Randeffekte und nehmen Sie an, dass die Ladung Null ist zu $t = 0$.

(b) In den Vorlesungen wurde die gespeicherte Energie in elektrischen und magnetischen Feldern behandelt. Bestimmen Sie die gesamte elektromagnetische Energie U_{em} die in der Spalte gespeichert wird, als Funktion der Zeit t.

Aufgabe 2: Kugelwellen (4 Punkte)

Betrachten Sie die Kugelwelle,

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \varphi, t) = E_0 \frac{\sin\theta}{r} \left[\cos u - \frac{1}{kr} \sin u \right] \hat{\varphi} \,. \tag{2.1}$$

Hierin sind $u = kr - \omega t$ und $|\vec{k}| = \omega/c$ der Wellenvektor.

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{E}$ in Gleichung 2.1 die Maxwell Gleichungen im Vakuum erfüllt, und bestimmen Sie das dazugehörige Magnetfeld.
[Hinweis: Ignorieren Sie statische Beiträge $\vec{B}_s = \vec{B}_s(r, \theta, \varphi)$, $\partial_t \vec{B}_s = 0$ des magnetischen Felds, d.h. statische Hintergrundfelder.]

(b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor, definiert als,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \,. \tag{2.2}$$

Bestimen Sie die Intensität $\vec{I}$ indem Sie $\vec{S}$ über eine vollständige Periode mitteln,

$$\vec{I} = \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \vec{S} = \frac{E_0^2 \sin^2\theta}{2\mu_0 c r^2}\hat{r}\,. \tag{2.3}$$

(c) Bestimmen Sie die gesamte abgestrahlte Leistung indem Sie die Intensität über eine kugelförmige Oberfläche integrieren,

$$P = \int \vec{I}\cdot \mathrm{d}\vec{a}\,. \tag{2.4}$$

Aufgabe 3: Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (3 Punkte)

Eine monochromatische, ebene Welle der Frequenz ω die senkrecht in y-Richtung polarisiert ist bewegt sich in z-Richtung und trifft mit dem Einfallswinkel θ_I auf eine Grenzfläche in der x-y-Ebene (siehe Abbildung 2). Unterhalb dieser Grenzfläche befindet sich eine Luftsäule der Höhe d. Im Bereich $z < 0$ und $z > d$ befindet sich ein nicht magnetisiertes Dielektrikum mit Brechungsindex n. Seien $\vec{E}_I$, $\vec{E}_R$ und $\vec{E}_T$ jeweils die einfallenden, reflektierten und transmittierten elektrischen Felder in den Dielektrika. Die einfallenden und reflektierten Wellen an der unteren Grenzfläche bezeichnen wir jeweils mit $\vec{E}_+$ und $\vec{E}_-$.

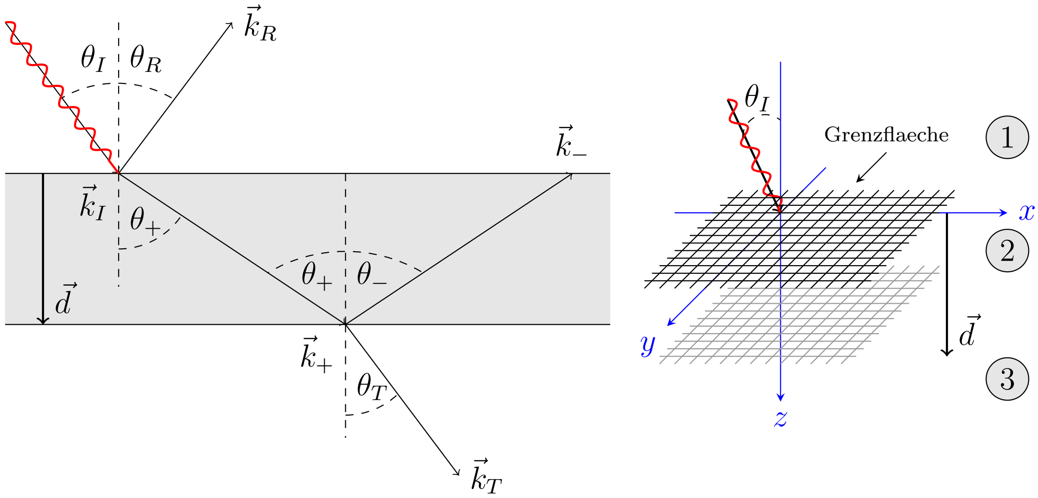

Abbildung 2: Ein Dielektrikum wird durch eine Luftsäule der Höhe d in zwei Bereiche unterteilt. Eine senkrecht polarisierte EM-Welle trifft auf die obere Grenzfläche mit Einfallswinkel θ_I. Der Brechungsindex in den Bereichen 1 und 3 ist jeweils n, in der Luftsäule gilt $n = 1$.

(a) Schreiben Sie die komplexwertigen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder in den jeweiligen Gebieten auf. Beachten Sie dabei, dass die Welle von der Propagation zur unteren Grenze eine Phase aufnimmt.

(b) Stellen Sie anhand der Randbedingung ein Gleichungssystem auf, die die verschiedenen Komponenten der elektrischen Felder $\vec{E}_a$, $a \in \{I, R, T, +, -\}$ miteinander verknüpft.

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem aus Teil (b) nach E_T und E_R auf als Funktion von E_I, n und θ_I. Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R und T und bestätigen Sie schliesslich die Aussage $R + T = 1$. Es könnte hilfreich sein folgendes zu definieren:

$$\alpha = n\frac{\cos\theta_I}{\cos\theta_+} = n\frac{\cos\theta_I}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\theta_I}}\,. \tag{3.1}$$