Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 1

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 25.10.2023, Abgabe: 06.11.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 08.11.2023

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Die Delta-Distribution (5 Punkte)

Die eindimensionale Delta Distribution $\delta(x)$ (auch Dirac-Funktion oder δ-Funktion genannt) lässt sich durch das Integral über eine beliebige, stetige und integrable Testfunktion $f(x)$ definieren

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) f(x) \mathrm{d}x = f(x_0). \tag{1}$$

Zeigen Sie mithilfe dieser Definition die folgenden Identitäten:

1.a) $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$ für $a \neq 0$

1.b) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{|2a|}$ für $a \neq 0$

1.c) $x\delta'(x) = -\delta(x)$

1.d) $\delta(g(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x_0)|}$ für eine Funktion $g(x)$, die genau eine einfache Nullstelle bei $x = x_0$ besitzt.

Hinweis: Um zu zeigen, dass zwei Distributionen $\delta(x)$ und $\tilde{\delta}(x)$ gleich sind, reicht es zu zeigen, dass $\int f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\tilde{\delta}(x)\mathrm{d}x$ für beliebige Funktionen $f(x)$.

Aufgabe 2: Vektoridentitäten (5 Punkte)

Zeigen Sie für eine beliebige, differenzierbare Funktion $f = f(x, y, z)$ und die Vektorfelder $\vec{a}(x, y, z)$ und $\vec{b}(x, y, z)$ die folgenden Identitäten:

2.a) $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{a}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{a} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$

2.b) $\vec{\nabla} \times (f\vec{a}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{a} + f\vec{\nabla} \times \vec{a}$

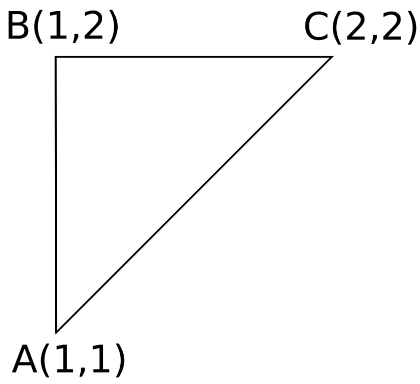
2.c) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$

2.d) $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}$

Hinweis: Verwenden Sie Indexnotation und die Einsteinsche Summenkonvention, insbesondere die Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}$.

Aufgabe 3: Pfadintegrale (4 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A} = 2x\hat{e}_x + 2y\hat{e}_y$ und die drei Punkte in der $x - y$ Ebene $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 2, 0)$ and $C = (2, 2, 0)$.



3.a) Berechnen Sie die das Pfadintegral entlang des Weges $A \to B \to C$:

$$\int_{A \to B} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{B \to C} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

3.b) Berechnen Sie nun das Integral entlang des direkten Weges von $A \to C$:

$$\int_{A \to C} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

3.c) Nutzen Sie nun die Ergebnisse um das geschlossene Integral $\oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ entlang des Pfads $A \to B \to C \to A$ zu berechnen.

3.d) Nun sei ein anderes Vektorfeld $\vec{B} = (2x + y)\hat{e}_x + (2y - x)\hat{e}_y$ gegeben.

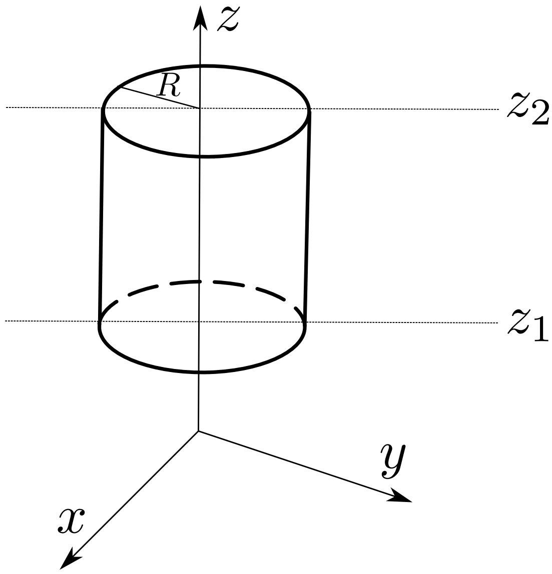
Erwarten Sie, dass Sie das selbe Ergebnis für $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ wie in der vorherigen Aufgabe erhalten? Berechen Sie $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Hinweis: Sie können hier zu einem Ergebniss kommen, ohne ein expliztes Pfadintegral auszuführen.

Aufgabe 4: Fluss durch einen Zylinder (6 Punkte)

Gegeben sei ein Zylinder, dessen Grundflächen parallel zur $x - y$ Ebene liegen und den Mittelpunkt auf der z-Achse haben. Die untere Grundfläche befindet sich bei $z = z_1$, die obere bei $z = z_2 > z_1$ und der Radius sei R. Durch den Zylinder fließt ein Vektorfeld, beschrieben durch

$$\vec{A} = xz\hat{e}_x + yz\hat{e}_y + (x^2 + y^2)z\hat{e}_z \ .$$



4.a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{A}$ in zylindrischen Koordinaten gegeben ist durch

$$\vec{A} = \rho z \hat{e}_\rho + \rho^2 z \hat{e}_z \ . \tag{2}$$

4.b) Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche des Zylinders $\int_{\partial \text{Zylinder}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

4.c) Berechnen Sie die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ und integrieren Sie diese über das Volumen des Zylinders.

4.d) Sind die Ergebnisse von b) und c) identisch? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht? Erläutern Sie kurz.

Hinweis: Die Berechnung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ vereinfacht sich in kartesischen Koordinaten.