Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 06.11.2023, Abgabe: 13.11.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 15.11.2023

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Elektrische Felder (7 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Kandidaten für elektrische Felder (innerhalb eines endlichen Volumens V um den Ursprung):

- $\vec{E}_a = \frac{\rho k}{d}\,(xz\hat{e}_x + xz\hat{e}_y - xy\hat{e}_z)$
- $\vec{E}_b = \frac{\rho k}{d}\,(2xz\hat{e}_x + 2yz\hat{e}_y + (x^2 + y^2)\hat{e}_z)$
- $\vec{E}_c = \rho k\,(2x\hat{e}_x + 2y\hat{e}_y + 2z\hat{e}_z)$
- $\vec{E}_d = \rho k\,(2x\hat{e}_x + 2x\hat{e}_y + 2x\hat{e}_z)$

wobei $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, ρ eine Ladungsdichte und d eine Länge.

1.a) Welche der vorherigen Ausdrücke können tatsächlich ein elektrisches Feld darstellen, das durch eine Ladungsverteilung erzeugt wird?

1.b) Bestimmen Sie für diese explizit das Potential an einem beliebigen Punkt $\vec{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, indem Sie $V(\vec{r}) = -\int_{\vec{0}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ auswerten.
Hinweis: Wenn ein Potential existiert, können Sie einen beliebigen Weg wählen.

1.c) Würde sich das Potential $V(\vec{r})$ ändern, wenn Sie den Startpunkt des Wegintegrals ändern? Wie sieht es mit der Potentialdifferenz $V(\vec{r}) - V(\vec{0})$ aus?

Betrachten Sie nun ein anderes Feld in Zylinderkoordinaten (siehe Hinweis auf Seite 3):

$$\vec{E} = \begin{cases} 2\pi k\lambda r\,\hat{\mathrm{e}}_\rho & \text{für } r \le R \\ 2\pi k\lambda \frac{R^2}{r}\,\hat{\mathrm{e}}_\rho & \text{für } r > R \end{cases} \tag{1}$$

1.d) Ist dieses elektrische Feld physikalisch? Berechnen Sie die Ladungsverteilung, die zu diesem Feld führt. Bestimmen Sie das Potential an einer beliebigen Entfernung r_0 von der z-Achse.

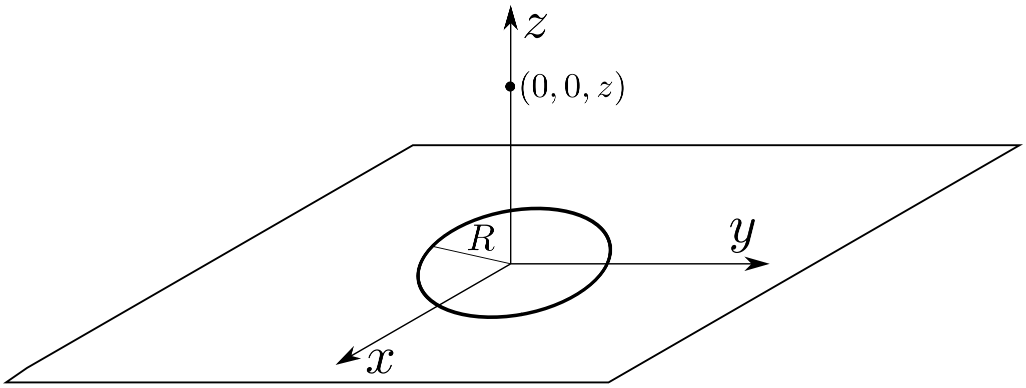
Aufgabe 2: Die geladene Scheibe und unendlich ausgedehnte Fläche (7 Punkte)

Betrachten Sie eine Scheibe mit dem Radius R, die in der x–y-Ebene liegt, wobei ihr Zentrum dem Ursprung $(0, 0, 0)$ entspricht. Die Scheibe hat die Oberflächenladungsdichte σ.

2.a) Berechnen Sie explizit das Potential über der Scheibe an der Position $(0, 0, z)$ für ein beliebiges $z > 0$. Aufgrund der Symmetrie des Problems ist es praktisch (aber nicht notwendig), zylindrische Koordinaten zu verwenden.

2.b) Leiten Sie das elektrische Feld an der Position $(0, 0, z)$ her. Was passiert im Grenzfall $R \to \infty$?

Ersetzen Sie nun die Scheibe durch eine unendliche Platte, die in der x–y-Ebene liegt. Diese Platte ist ebenfalls elektrisch geladen und hat eine Oberflächenladungsdichte σ.



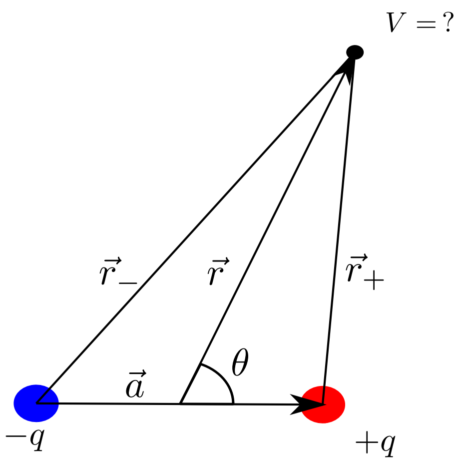
z

2.c) Leiten Sie das elektrische Feld am Ort $(0, 0, z)$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes her.
Hinweis: Verwenden Sie als Volumen ein Objekt mit Oberflächen, die parallel zur $x - y$-Ebene verlaufen.

2.d) Was passiert, wenn wir eine weitere unendliche Ebene mit entgegengesetzter Oberflächenladungsdichte $-\sigma$ bei $z_0 > 0$ platzieren? Berechnen Sie das elektrische Feld für die Regionen $z < 0$, $0 < z < z_0$ und $z > z_0$.

Aufgabe 3: Das Dipolpotential (6 Punkte)

Gegeben seien zwei punktförmige Objekte mit den elektrischen Ladungen $+q$ und $-q$, die mit einem Abstand $\vec{a}$ getrennt sind.



3.a) Berechnen Sie das Potential an einem beliebigen Punkt als Funktion von r, a und θ, wie es in der Abbildung zu sehen ist.
Hinweis: Es ist hilfreich mit einem Ausdruck anzufangen, der von r_+ und r_- abhängt.

3.b) Diskutieren Sie das Potential im Grenzfall $r \gg a$.

3.c) Leiten Sie das elektrische Feld aus dem Potential ab.

Vektoroperatoren in zylindrischen Koordinaten

Für einige der Aufgaben ist es sinnvoll zylindrische Koordianten zu verwenden. Die relevanten Differentialoperatoren in diesen Koordinaten für eine Funktion $f(\rho, \phi, z)$ und ein Vektorfeld $A(\rho, \phi, z)$ sind gegeben als:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\hat{\mathrm{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\hat{\mathrm{e}}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\mathrm{e}}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\mathrm{e}}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \tag{4}$$