Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 3

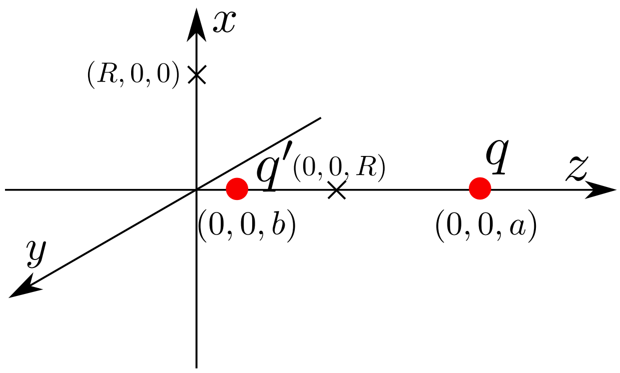
Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

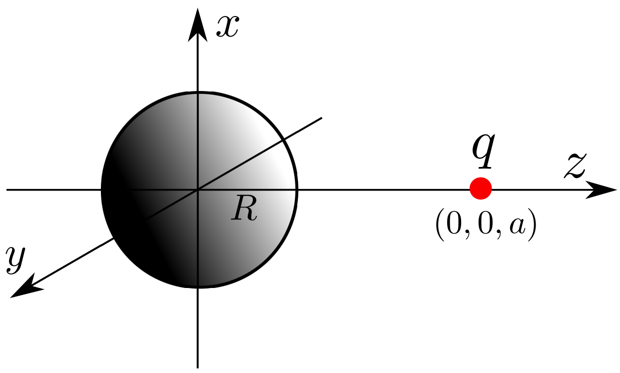
Ausgabe: 13.11.2023, Abgabe: 20.11.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 22.11.2023

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Die Methode der Spiegelladungen (7 Punkte)

Betrachten Sie zwei Ladungen q und q', die sich jeweils in den Abständen a und b vom Ursprung befinden. Der Einfachheit halber seien diese auf der z-Achse platziert, wie in der Abbildung unten links zu sehen.





1.a) Berechnen Sie das Potenzial in einem Abstand $b < R < a$ parallel und senkrecht zur z-Achse, zum Beispiel an den Positionen $(0, 0, R)$ und $(R, 0, 0)$.

1.b) Bestimmen Sie die Ladung q' und die Position b als Funktionen von a, q und R so, dass das Potential an den zuvor betrachteten Punkten $(0, 0, R)$ und $(R, 0, 0)$ verschwindet.

Betrachten Sie nun stattdessen nur die Ladung q und eine leitende Kugel mit dem Radius $R < a$ im Ursprung, wie in der Abbildung oben rechts zu sehen.

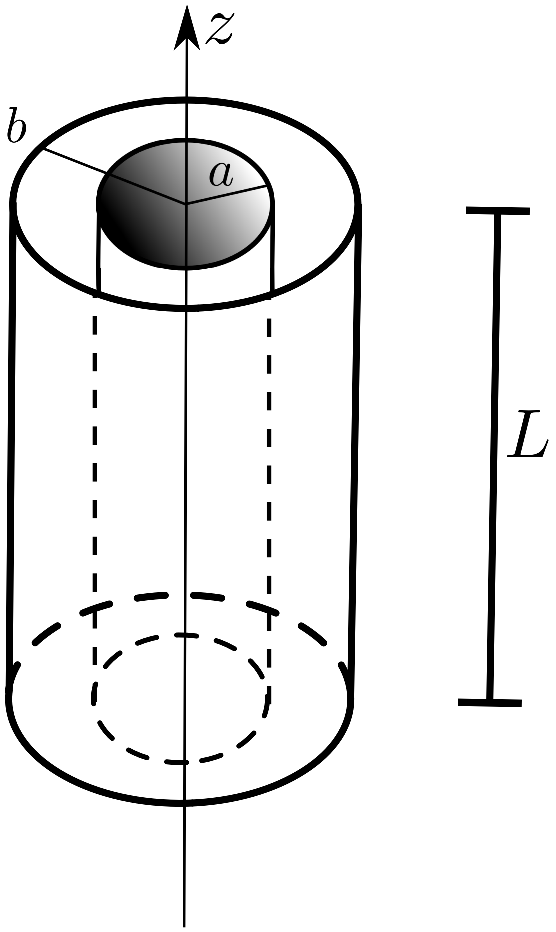
1.c) Welche Randbedingung müssen das Skalarpotential und das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel erfüllen? Zeigen Sie, dass diese Randbedingungen durch die in Teil b) betrachtete Spiegelladung erfüllt sind.

1.d) Was ist der Ausdruck für das Potenzial an einer allgemeinen Position außerhalb der Kugel $\phi(r, \theta, \varphi)$? Geben Sie das Ergebnis in Kugelkoordinaten an.

1.e) Wie lautet die Ladungsdichteverteilung auf der Kugel in Abhängigkeit von θ?

Aufgabe 2: Zylindrischer Kondensator (6 Punkte)

Gegeben seien zwei Zylinder, die wie unten abgebildet ineinander liegen. Der innere Zylinder ist mit einer konstanten Ladungsdichte ρ_0 geladen und hat einen Radius a. Der äußere Zylinder besteht nur aus einer Mantelfläche mit der Oberflächenladungsdichte σ_0, sodass die Gesamtladung des Systems 0 ist. Die äußere Oberfläche befindet sich in einem Abstand b von der z-Achse. Zwischen dem inneren Zylinder und der äußeren Oberfläche befindet sich Vakuum. Nehmen Sie im Folgenden an, dass die Länge der beiden Zylinder viel größer als ihr Durchmesser ist $L \gg b > a$, so dass Sie diese vereinfacht als unendlich lang beschreiben können.



2.a) Bestimmen Sie die Oberflächenladungsdichte σ_0 als Funktion von ρ_0.

2.b) Bestimmen Sie das elektrische Feld in einem beliebigen Abstand von der z-Achse und stellen Sie seinen Betrag als Funktion des Abstands dar.

2.c) Berechnen Sie die in dem System gespeicherte Energie.

2.d) Berechnen Sie die Potentialdifferenz zwischen der Oberfläche des inneren Zylinders und der äußeren Oberfläche. Wir können eine Größe namens Kapazität definieren als das Verhältnis zwischen der Ladung Q eines der beiden Körper und der Potentialdifferenz ΔV. Bestimmen Sie $C = Q/\Delta V$ und die Kapazität pro Längeneinheit C/L.

Aufgabe 3: Die Greensche Funktion in 2D (7 Punkte)

Während der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Greensche Funktion für den Laplace-Operator in 3D wie folgt geschrieben werden kann:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \tag{1}$$

mit der Eigenschaft

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{und} \quad \Delta F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \tag{2}$$

In dieser Aufgabe wollen wir die Greensche Funktion für den Laplace Operator in 2 Raumdimensionen herleiten.

Zunächst kann der Laplace-Operator in 2D wie folgt geschrieben werden:

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{3}$$

3.a) Zeigen Sie, dass für ein Problem mit Rotationssymmetrie die Lösung der homogenen Gleichung $\Delta \phi(\vec{r}) = 0$ für $\rho > 0$ durch $\phi(\vec{r}) = c_1 \log \rho + c_2$ gegeben ist.

3.b) Betrachten Sie nun das modifizierte Potential $\phi_\epsilon(\vec{r}) = c_1 \log(\rho + \epsilon)$ und bestimmen Sie die Konstante c_1 so, dass

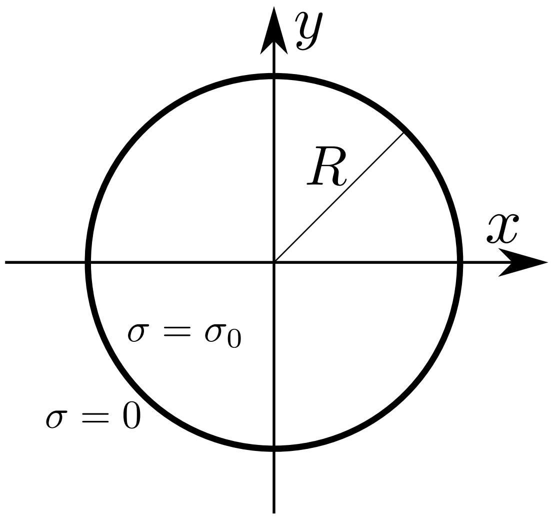
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \rho \mathrm{d}\rho \Delta \phi_\epsilon(\vec{r}) = 1 \tag{4}$$

für $\epsilon \to 0$.

Die allgemeine Lösung von $\Delta G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ in 2D lautet:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \log(|\vec{r} - \vec{r}'|) \ . \tag{5}$$

Betrachten Sie nun eine geladene Scheibe mit der Oberflächenladungsdichte σ_0. Die Scheibe hat einen Radius R.



3.c) Lösen Sie die Poisson-Gleichung für den Fall $\rho < R$ und $\rho > R$.

3.d) Legen Sie die Randbedingungen fest, indem Sie verlangen, dass die Lösung an den Rändern der Scheibe kontinuierlich und differenzierbar ist und dass sie für $\rho \to 0$ einen endlichen Wert annimmt. Ist dies ausreichend, um das Potential eindeutig festzulegen?