

Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Übungsblatt 3

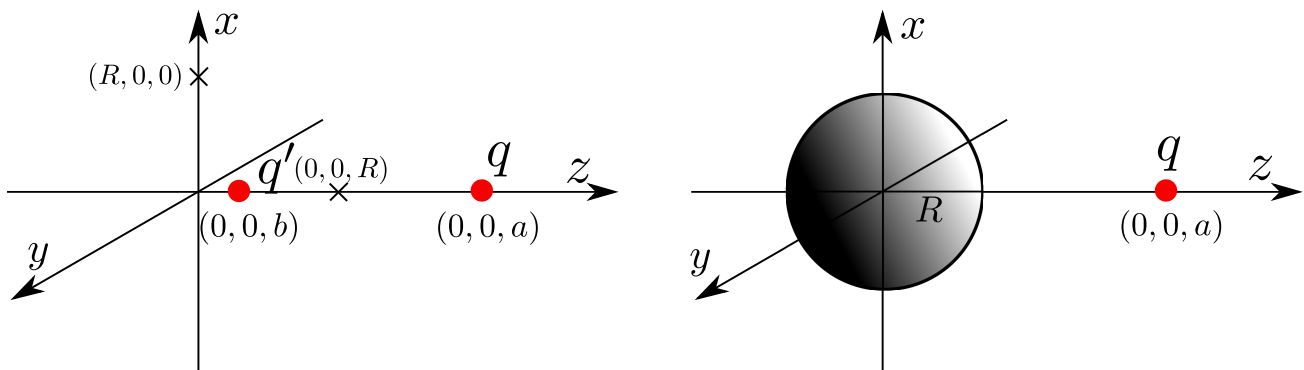
Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 13.11.2023, Abgabe: 20.11.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 22.11.2023

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Die Methode der Spiegelladungen (7 P)

Betrachten Sie zwei Ladungen q und q' , die sich jeweils in den Abständen a und b vom Ursprung befinden. Der Einfachheit halber seien diese auf der z -Achse platziert, wie in der Abbildung unten links zu sehen.



- 1.a) Berechnen Sie das Potenzial in einem Abstand $b < R < a$ parallel und senkrecht zur z -Achse, zum Beispiel an den Positionen $(0, 0, R)$ und $(R, 0, 0)$.
- 1.b) Bestimmen Sie die Ladung q' und die Position b als Funktionen von a, q und R so, dass das Potential an den zuvor betrachteten Punkten $(0, 0, R)$ und $(R, 0, 0)$ verschwindet.

Betrachten Sie nun stattdessen nur die Ladung q und eine leitende Kugel mit dem Radius $R < a$ im Ursprung, wie in der Abbildung oben rechts zu sehen.

- 1.c) Welche Randbedingung müssen das Skalarpotential und das elektrische Feld auf der Oberfläche der Kugel erfüllen? Zeigen Sie, dass diese Randbedingungen durch die in Teil b) betrachtete Spiegelladung erfüllt sind.
- 1.d) Was ist der Ausdruck für das Potenzial an einer allgemeinen Position außerhalb der Kugel $\phi(r, \theta, \varphi)$? Geben Sie das Ergebnis in Kugelkoordinaten an.
- 1.e) Wie lautet die Ladungsdichteverteilung auf der Kugel in Abhängigkeit von θ ?

Lösung zu Aufgabe 1:

1.a) (1 point)

Aufgrund des Superpositionsprinzips ist das Potential durch die Summe der Potentiale der beiden Ladungen gegeben. Wir müssen hier lediglich die Abstände korrekt bestimmen:

$$\phi(0, 0, R) = \frac{kq}{a - R} + \frac{kq'}{R - b} \quad (1)$$

$$\phi(0, R, 0) = \frac{kq}{\sqrt{a^2 + R^2}} + \frac{kq'}{\sqrt{b^2 + R^2}} \quad (2)$$

Aufgrund der Rotationsymmetrie in um die z-Achse gilt der letzte Term in $\phi(R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$ für jedes φ .

1.b) (1.5 point)

Nun setzen wir voraus, dass das Potenzial an diesen Punkten 0 ist:

$$\begin{cases} \frac{kq}{a-R} + \frac{kq'}{R-b} = 0 \\ \frac{kq}{\sqrt{a^2+R^2}} + \frac{kq'}{\sqrt{b^2+R^2}} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q' = q \frac{R-b}{R-a} \\ \frac{q^2}{a^2+R^2} = \frac{q'^2}{b^2+R^2} = \frac{q^2}{b^2+R^2} \left(\frac{R-b}{R-a}\right)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q' = -q \frac{R}{a} \\ b = \frac{R^2}{a} \end{cases} \quad (3)$$

Offensichtlich müssen die beiden Ladungen q und q' entgegengesetzte Vorzeichen haben. Außerdem muss die zweite Ladung, da $a > R$, einen Abstand kleiner als R haben.

1.c) (2.5 point)

Da wir annehmen, dass die Kugel ein Leiter ist, gilt als Randbedingung auf der Oberfläche der Kugel, dass das Potential verschwindet. Oder anders ausgedrückt, die Ladung auf der Kugeloberfläche verteilt sich so, dass die elektrischen Feldlinien orthogonal zur Oberfläche stehen.

In den vorherigen beiden Teilaufgaben haben wir schon eine Ladungsverteilung gefunden, für die das Potential an den beiden Punkten $(R, 0, 0)$ und $(0, 0, R)$ verschwindet. Es liegt nun Nahe, dass dasselbe Potential auch auf dem Rest der Oberfläche verschwindet.

Nehmen wir an, dass dies der Fall ist, und berechnen das Potenzial an einer allgemeinen Position (r, θ, φ) . Wie zuvor erwähnt, sollte keine Abhängigkeit von φ bestehen. Daher können wir die Abstände einfach in 2D auf der Ebene x-z berechnen. Dann haben wir allgemein:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{kq'}{\sqrt{(r \sin \theta)^2 + (b - r \cos \theta)^2}} + \frac{kq}{\sqrt{(r \sin \theta)^2 + (a - r \cos \theta)^2}} \quad (4)$$

Wenn wir die Werte von b und q' einsetzen, erhalten wir:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{kq}{\frac{a}{r} \sqrt{(r \sin \theta)^2 + \left(\frac{R^2}{a} - r \cos \theta\right)^2}} + \frac{kq}{\sqrt{(r \sin \theta)^2 + (a - r \cos \theta)^2}} \quad (5)$$

$$= kq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2ar \cos \theta}} \right) \quad (6)$$

Es ist jetzt klar zu sehen, dass das Potenzial für $r = R$ verschwindet. Damit haben wir ein Beispiel für die Methode der Spiegelladung gesehen.

1.d) (2 points)

Alles, was noch übrig bleibt, ist die Ladungsdichte zu berechnen. Da der Normalenvektor zur Oberfläche $\hat{e}_r$ ist, benötigen wir nur eine Komponente des Gradienten:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \phi \cdot \hat{n} = \vec{\nabla} \phi \cdot \hat{e}_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (7)$$

Da es sich bei der Kugel um einen Leiter handelt, verschwindet der Gradient entlang der Oberfläche ($\phi(R, \varphi, \theta) = 0$ für alle φ, θ), jedoch nicht in radialer Richtung.

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = - \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_R = -kq \left(\frac{-r + a \cos \theta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} - \frac{-\frac{a^2 r}{R^2} + a \cos \theta}{(\frac{a^2 r^2}{R^2} + R^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} \right) \Big|_R = \quad (8)$$

$$= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{a^2}{R} - R}{(a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} \quad (9)$$

Greensche Funktion in 2D zum Lösen der Poisson Gleichung

Alex Eberhart

Contents

1	Greensche Funktion in 2D	1
2	Der einfache Weg (durch direktes Integrieren)	2
3	Der komplizierte Weg (mit Greenscher Funktion)	3
4	Das azimutale Integral	4
4.1	Feynman Technik (Teil 1)	5
4.2	Weierstraß-Substitution	5
4.3	Feynman Technik (Teil 2)	7
5	Das radiale Integral	9
6	Endgültige Lösung	10

1 Greensche Funktion in 2D

In 2D ist der Laplaceoperator gegeben durch

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \quad (1)$$

Wir haben gezeigt dass die Greensche Funktion für diesen Laplaceoperator

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3)$$

ist. Jetzt ist eine homogen geladene Scheibe mit Radius R und Flächenladung σ_0 gegeben.

$$\sigma(\vec{r}') = \sigma(\rho') = \sigma_0 \theta(R - \rho') = \begin{cases} \sigma_0 & \text{für } \rho' < R \\ 0 & \text{für } \rho' > R \end{cases} \quad (4)$$

Die Poissonsgleichung

$$\Delta\phi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5)$$

kann auf zwei Arten gelöst werden.

2 Der einfache Weg (durch direktes Integrieren)

Der Laplaceoperator kann ausgeschrieben werden, wobei aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems die Winkelabhängigkeit vernachlässigt wird.

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) \stackrel{\rho < R}{=} -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Jetzt muss einfach durch multiplizieren/dividieren von ρ und Integration nach ϕ aufgelöst werden.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = -\frac{\sigma_0}{\epsilon} \rho \quad (7)$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \rho^2 + C \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \rho + \frac{C}{\rho} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \phi(\rho < R) = -\frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} \rho^2 + C \ln(\rho) + D \quad (10)$$

Für den Fall $\rho > R$ würde genau das selbe rauskommen, nur dass man den Term mit σ_0 auf Null setzen muss. Zusammenfassend erhält man also

$$\phi(\rho > R) = C_1 \ln(\rho) + C_2 \quad (11)$$

$$\phi(\rho < R) = -\frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} \rho^2 + C_3 \ln(\rho) + C_4 \quad (12)$$

Die Konstanten können durch die Grenzbedingungen bestimmt werden:

- Stetigkeit für $\rho = R$
- Differenzierbarkeit $\rho = R$
- Keine Divergenz für $\rho \rightarrow 0$

$$C_1 \ln(R) + C_2 = -\frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} R^2 + C_3 \ln(R) + C_4 \quad (13)$$

$$\frac{C_1}{R} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R + \frac{C_3}{R} \quad (14)$$

$$C_3 = 0 \quad (15)$$

Daraus folgt

$$C_1 = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R^2 \quad (16)$$

$$C_4 = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} R^2 - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R^2 \ln(R) + C_2 \quad (17)$$

Man sieht also dass C_1 und C_3 festgelegt sind. Mit Gleichung (17) ist aber nur eine der beiden Konstanten C_2 oder C_4 bestimmt. Die andere bleibt als Eichfreiheit übrig und entspricht der freien Wahl des Referenzpunktes des Potentials.

3 Der komplizierte Weg (mit Greenscher Funktion)

Man kann das Potential auch mithilfe der Greenschen Funktion berechnen. Wir wissen dass die homogene Lösung der Poissongleichung die Laplacegleichung löst.

$$\Delta\phi_h = 0 \quad (18)$$

Die homogene Lösung kennen wir bereits aus (11), diese ist nämlich die Lösung außerhalb der Scheibe, wo $\sigma = 0$ gilt.

$$\phi_h(\rho) = C_1 \ln(\rho) + C_2 \quad (19)$$

Um die partikuläre Lösung zu finden können wir uns die Eigenschaften der Greenschen Funktion zunutze machen. Wie im Tutorium bereits besprochen kann die Lösung berechnet werden durch

$$\phi_p(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}') \left(-\frac{\sigma(\vec{r}')}{\epsilon_0} \right) d^2r' \quad (20)$$

Nochmal als Erinnerung: $\vec{r}$ ist die Position an dem wir das Potential auswerten wollen. Man kann es sich also so vorstellen wie die Position eines Beobachters, und es wird nicht darüber integriert. $\vec{r}'$ ist effektiv die Position der Ladungen innerhalb der Scheibe, über die integriert wird.

Mit

$$\sigma(\vec{r}') = \sigma(\rho') = \sigma_0 \theta(R - \rho') \quad (21)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (22)$$

folgt

$$\phi_p(\vec{r}) = -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \int_A \ln(|\vec{r} - \vec{r}'|) d^2r' \quad (23)$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Systems kann man o.B.d.A. sagen dass $\vec{r}$ in x-Richtung zeigt (auch wenn dies nicht der Fall wäre, könnte man das Koordinatensystem so drehen dass es wieder in x-Richtung zeigt). Für $\vec{r}'$ können wir dann Polarkoordinaten wählen, sodass θ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ ist.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} \rho' \cos(\theta) \\ \rho' \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\vec{r}^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + \vec{r}'^2} \quad (25)$$

$$= \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta) + \rho'^2} \quad (26)$$

$$d^2r' = \rho' d\rho' d\theta \quad (27)$$

Das Potential ist also

$$\phi_p(\rho) = -\frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \ln\left(\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta) + \rho'^2}\right) \rho' d\theta d\rho' \quad (28)$$

$$= -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \ln\left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta)\right) \rho' d\theta d\rho' \quad (29)$$

Dieses Integral ist sehr komplex. Man muss auch beachten dass es trotz der generellen Rotationssymmetrie des Systems hier im Integral eine Winkelabhängigkeit gibt. Wir werten also die radialen und azimutalen Integrale separat aus.

4 Das azimutale Integral

Betrachten wir das Integral

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} \ln\left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta)\right) d\theta \quad (30)$$

Dann können wir ρ und ρ' als konstant sehen, und sie so substituieren dass

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} \ln(a - b \cos(\theta)) d\theta \quad (31)$$

$$a = \rho^2 + \rho'^2 \geq 0 \quad , \quad b = 2\rho\rho' \geq 0 \quad (32)$$

Wir vereinfachen noch etwas weiter, indem wir das a aus dem Logarithmus ziehen.

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} \ln \left[a \left(1 - \frac{b}{a} \cos(\theta) \right) \right] d\theta \quad , \quad \lambda = \frac{b}{a} \quad (33)$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln(1 - \lambda \cos(\theta)) d\theta + \int_0^{2\pi} \ln(a) d\theta \quad (34)$$

Das hintere Integral ist trivial, da der Integrand konstant ist. Das vordere ist natürlich interessanter. Es gibt mehrere Wege es auszurechnen, aber eine Methode ist die sogenannte Feynman Technik.

4.1 Feynman Technik (Teil 1)

Wir definieren

$$I(\lambda) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - \lambda \cos(\theta)) d\theta \quad (35)$$

Dieses Integral hängt von λ ab. Der Trick ist jetzt dieses gesamte Integral nach dem Parameter abzuleiten. Da die Ableitung unabhängig von θ ist, kann man es ins Integral reinziehen. Es wird dann hoffentlich einfacher.

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{2\pi} \ln(1 - \lambda \cos(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(1 - \lambda \cos(\theta)) d\theta \quad (36)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\cos(\theta)}{1 - \lambda \cos(\theta)} d\theta \quad (37)$$

Naja, sieht jetzt nicht wirklich sehr viel schöner aus, aber wir können den Zähler erweitern um es zu vereinfachen.

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \lambda \cos(\theta) - 1}{1 - \lambda \cos(\theta)} d\theta \quad (38)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} 1 d\theta - \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \lambda \cos(\theta)} d\theta \quad (39)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \lambda \cos(\theta)} d\theta \quad (40)$$

4.2 Weierstraß-Substitution

Was jetzt ganz praktisch ist, ist dass man weiß wie das hintere Integral berechnet werden kann (Danke Euler!). Definieren wir

$$\tilde{I} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \lambda \cos(\theta)} d\theta \quad (41)$$

dann können wir die sogenannte Weierstraß-Substitution durchführen:

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (42)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{1+t^2}{2} \quad (43)$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt \quad (44)$$

Mithilfe der Doppelwinkelidentität des Kosinus lässt sich dieser auch einfach umschreiben

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (45)$$

und das Integral wird (relativ) schön. Man muss aber beachten dass man das Integral bei $\theta = \pi$ aufteilen muss, da $\tan(\theta/2)$ dort nicht stetig ist.

$$\tilde{I} = \int_0^\pi \frac{1}{1 - \lambda \cos(\theta)} d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{1 - \lambda \cos(\theta)} d\theta \quad (46)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{1 - \lambda \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1 - \lambda \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2} dt \quad (47)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2 - \lambda(1-t^2)} dt \quad (48)$$

$$= 2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+\lambda)t^2 + (1-\lambda)} dt \quad (49)$$

$$= \frac{2}{1-\lambda} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}t^2 + 1} dt \quad (50)$$

Durch Substitution $x = \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}t$ können wir das Integral endlich lösen.

$$\tilde{I} = \frac{2}{1-\lambda} \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad (51)$$

Dieses Integral solltet ihr alle kennen, denn

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (52)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} = \pi \quad (53)$$

Wir haben also herausgefunden dass

$$\tilde{I} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad . \quad (54)$$

4.3 Feynman Technik (Teil 2)

Dieses Resultat können wir wieder in (40) einsetzen:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (55)$$

Um das eigentliche $I(\lambda)$ finden zu können, müssen wir (55) integrieren.

$$I(\lambda) = \int \frac{\partial I}{\partial \lambda} d\lambda = 2\pi \left(\int \frac{1}{\lambda} d\lambda - \int \frac{1}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda \right) \quad (56)$$

Das erste Integral ist einfach. Für das zweite substituieren wir

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1-\lambda^2} \\ \frac{du}{d\lambda} &= -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} = -\frac{\lambda}{u} \\ \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} &= \frac{d\lambda}{\lambda u} = -\frac{du}{\lambda^2} = -\frac{du}{1-u^2} \\ \Leftrightarrow \int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} &= -\int \frac{du}{1-u^2} \end{aligned}$$

Dieses Integral solltet ihr auch kennen, denn

$$\frac{d}{du} \operatorname{artanh}(u) = \frac{1}{1-u^2} \quad (57)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}} = -\operatorname{artanh}(u(\lambda)) = -\operatorname{artanh}(\sqrt{1-\lambda^2}) \quad (58)$$

Das Integral $I(\lambda)$ ist also gegeben durch

$$I(\lambda) = 2\pi \ln(\lambda) + 2\pi \operatorname{artanh}(\sqrt{1-\lambda^2}) + C \quad (59)$$

mit einer Integrationskonstante C . Wir können dies weiter vereinfachen indem wir

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (60)$$

verwenden.

$$I(\lambda) = 2\pi \ln(\lambda) + \pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{1 - \sqrt{1 - \lambda^2}} \right) + C \quad (61)$$

$$= \ln \left(\frac{\lambda^2}{1 - \sqrt{1 - \lambda^2}} \right) + \pi \ln \left(1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \right) + C \quad (62)$$

$$= \ln \left(\frac{\lambda^2 (1 + \sqrt{1 - \lambda^2})}{\lambda^2} \right) + \pi \ln \left(1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \right) + C \quad (63)$$

$$\Rightarrow I(\lambda) = 2\pi \ln \left(1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \right) + C \quad (64)$$

Sieht doch ganz schön aus! Jetzt müssen wir noch die Integrationskonstante bestimmen. Dies machen wir indem wir z.B. $I(\lambda = 0)$ in (35) ausrechnen, um die Konstante zu fixieren.

$$I(0) = \int_0^{2\pi} \ln(1) d\theta = 0 \quad (65)$$

$$\Rightarrow I(0) \stackrel{(64)}{=} 2\pi \ln(2) + C \stackrel{!}{=} 0 \quad (66)$$

$$\Rightarrow C = -2\pi \ln(2) \quad (67)$$

Wir haben es also endlich geschafft das Azimuthalintegral zu bestimmen:

$$I(\lambda) = 2\pi \ln \left(1 + \sqrt{1 - \lambda^2} \right) - 2\pi \ln(2) = 2\pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{2} \right) \quad (68)$$

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} \ln(1 - \lambda \cos(\theta)) d\theta + \int_0^{2\pi} \ln(a) d\theta \quad (69)$$

$$= I(\lambda) + 2\pi \ln(a) \quad (70)$$

$$= 2\pi \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}}{2} \right) + 2\pi \ln(a) \quad (71)$$

$$= 2\pi \ln \left(\frac{a + a\sqrt{1 - \lambda^2}}{2} \right), \quad \lambda = \frac{b}{a} \quad (72)$$

$$\Rightarrow I_\theta(a, b) = 2\pi \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right) \quad (73)$$

Diese Formel gilt natürlich nur wenn $a^2 \geq b^2$ ist. In unserem Fall ist dies gewährleistet,

da

$$a = \rho^2 + \rho'^2 \quad (74)$$

$$b = 2\rho\rho' \quad (75)$$

$$(\rho - \rho')^2 = \rho^2 - 2\rho\rho' + \rho'^2 \geq 0 \quad (76)$$

$$\Rightarrow a - b \geq 0 \quad \Rightarrow a \geq b \quad (77)$$

Nach RÜCHSsubstitution erhalten wir

$$I_\theta(\rho, \rho') = 2\pi \ln \left(\frac{\rho^2 + \rho'^2 + \sqrt{(\rho^2 + \rho'^2)^2 - 4\rho^2\rho'^2}}{2} \right) \quad (78)$$

$$= 2\pi \ln \left(\frac{\rho^2 + \rho'^2 + \sqrt{(\rho^2 - \rho'^2)^2}}{2} \right) \quad (79)$$

$$= 2\pi \ln \left(\frac{\rho^2 + \rho'^2 + |\rho^2 - \rho'^2|}{2} \right) \quad (80)$$

Um die Betragsstriche zu entfernen können wir eine Fallunterscheidung machen:

$$I_\theta(\rho, \rho') = \begin{cases} 4\pi \ln(\rho) & , \quad \text{für } \rho > \rho' \\ 4\pi \ln(\rho') & , \quad \text{für } \rho < \rho' \end{cases} \quad (81)$$

Wir bekommen also endlich ein überraschend schönes Ergebnis für das azimutale Integral.

5 Das radiale Integral

Jetzt wo wir das schwerste hinter uns haben können wir das azimutale Integral in die Formel für das Potential in (29) einsetzen.

$$\phi_p(\rho) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R I_\theta(\rho, \rho') \rho' d\rho' \quad (82)$$

Jetzt müssen wir nur noch das radiale Integral

$$I_r(\rho) = \int_0^R I_\theta(\rho, \rho') \rho' d\rho' \quad (83)$$

ausrechnen. Dies ist an sich nicht schwierig, man muss aber auf die Fallunterscheidungen in I_θ aufpassen. Betrachten wir als erstes den Fall dass wir außerhalb der Scheibe sind, also $\rho > R$. Da ρ' nur im Bereich $0 \leq \rho' \leq R$ integriert wird, können wir einfach für I_θ

den Fall $\rho > \rho'$ benutzen.

$$I_r(\rho > R) = 4\pi \ln(\rho) \int_0^R \rho' d\rho' = 2\pi R^2 \ln(\rho) \quad (84)$$

Für den Fall $\rho < R$ müssen wir aufpassen dass wir das Integral in zwei Teile aufteilen, nämlich $0 \leq \rho' \leq \rho$ und $\rho \leq \rho' \leq R$. Man sieht hier auch direkt welche Fälle man für I_θ verwenden muss.

$$I_r(\rho < R) = 4\pi \ln(\rho) \int_0^\rho \rho' d\rho' + 4\pi \int_\rho^R \ln(\rho') \rho' d\rho' \quad (85)$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} 2\pi \rho^2 \ln(\rho) + 2\pi [\ln(\rho') \rho'^2]_{\rho'=\rho}^{\rho'=R} - 2\pi \int_\rho^R \rho' d\rho' \quad (86)$$

$$= 2\pi \rho^2 \ln(\rho) + 2\pi [R^2 \ln(R) - \rho^2 \ln(\rho)] - \pi (R^2 - \rho^2) \quad (87)$$

$$= \pi \rho^2 - \pi R^2 + 2\pi R^2 \ln(R) \quad (88)$$

6 Endgültige Lösung

Nun können wir endlich die partikuläre Lösung des Potentials hinschreiben:

$$\phi_p(\rho) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} I_r(\rho) \quad (89)$$

$$\phi_p(\rho > R) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R^2 \ln(\rho) \quad (90)$$

$$\phi_p(\rho < R) = -\frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} \rho^2 + \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} R^2 - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R^2 \ln(R) \quad (91)$$

Addiert man jetzt noch den homogenen Teil, dann hat man das gesamte Potential:

$$\phi_h(\rho) = A \ln(\rho) + B \quad (92)$$

$$\phi(\rho > R) = A \ln(\rho) + B - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R^2 \ln(\rho) \quad (93)$$

$$\phi(\rho < R) = C \ln(\rho) + D - \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} \rho^2 + \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} R^2 - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R^2 \ln(R) \quad (94)$$

Wenn wir dies mit der Lösung aus Kapitel 2 vergleichen, nachdem wir C_1 , C_3 und C_4 einsetzen (die Konstante C_2 ist frei wählbar)

$$\phi(\rho > R) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R^2 \ln(\rho) + C_2 \quad (95)$$

$$\phi(\rho < R) = -\frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} \rho^2 + \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} R^2 - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R^2 \ln(R) + C_2 \quad (96)$$

sehen wir dass dies genau die selben Lösungen sind, wenn man für die Konstanten

$$A = 0 \quad , \quad B = C_2 \quad , \quad C = 0 \quad , \quad D = C_2 \quad (97)$$

wählt.

Man kann also sehen dass man auf die Richtige Lösung kommt wenn man mit der Greenschen Funktion arbeitet. Man sollte aber immer taktisch vorgehen...nur weil es funktioniert heißt das lange nicht dass es schön oder effizient ist.