Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

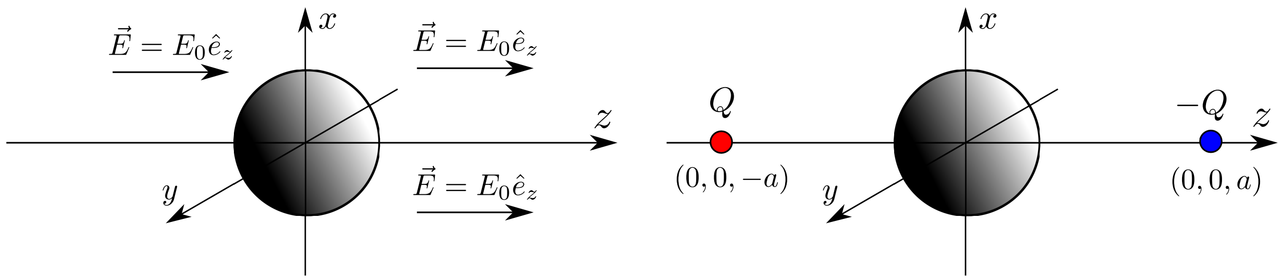
Ausgabe: 20.11.2023, Abgabe: 27.11.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 29.11.2023

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Kugel im homogenen E-Feld (7 Punkte)

Sie haben sicher schon festgestellt, dass man in der Elektrodynamik dasselbe Problem auf unterschiedliche Weisen lösen kann. In dieser Übung geht es um ein Problem, das mit der Spiegelladungsmethode oder dem Ansatz der Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Wir betrachten eine Kugel mit dem Radius R in einem konstanten Feld $\vec{E}$. Wir können der Einfachheit halber annehmen, dass dieses Feld in z-Richtung zeigt, also $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$ wie in der nachfolgenden Abbildung. Zur Erinnerung: Im vorherigen Übungsblatt haben wir gelernt, dass das Spiegelbild einer Ladung q im Abstand a von einer Kugel mit dem Radius R eine Ladung $q' = -q\frac{R}{a}$ im Abstand $b = \frac{R^2}{a} < R$ ist.



1.a) Eine Möglichkeit, ein annähernd konstantes Feld $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$ um den Ursprung zu erzeugen, besteht darin zwei Ladungen Q und $-Q$ an die Orte $(0,0,-a)$ bzw. $(0,0,a)$ zu setzen. Bestimmen Sie die Ladung Q als Funktion von a und E_0, so dass das elektrische Feld in der Nähe des Ursprungs (also für Orte mit $r \ll a$) E_0 entspricht.

1.b) Betrachten Sie nun eine leitende Kugel mit dem Radius R im Ursprung, die in das elektrische Feld $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$ eingetaucht ist. Leiten Sie mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen und der im vorigen Punkt hergeleiteten Äquivalenz das Potential $\phi(r,\theta)$ in der Nähe der Kugel her.

1.c) Vergessen Sie nun, was Sie in den Teilaufgaben 1.a) und 1.b) gelernt haben und betrachten Sie erneut eine leitenden Kugel im Ursprung, die einem konstanten Feld E_0 ausgesetzt ist. Welche Randbedingung muss das Potential ϕ auf der Kugel ($r = R$) erfüllen? Warum gilt $\phi(\vec{r}) \approx c - E_0 z$ für $z = r\cos\theta \gg R$ und eine geeignete Konstante c?

1.d) Das Potential im Fall der azimutalen Rotationssymmetrie (Unabhängigkeit von φ) kann geschrieben werden als

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \tag{1}$$

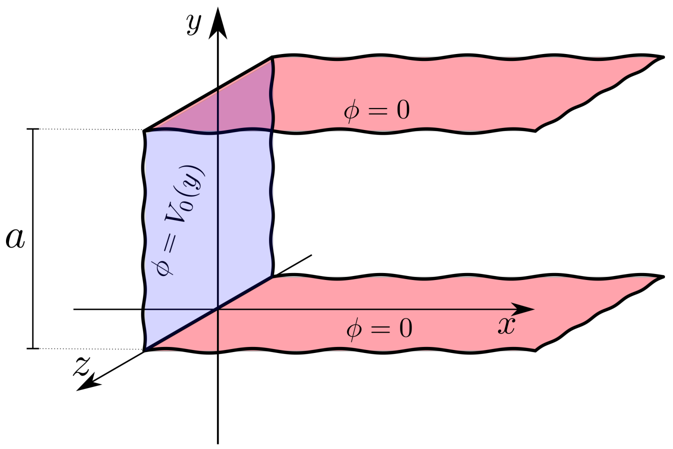
wobei P_l die Legendre-Polynome sind.

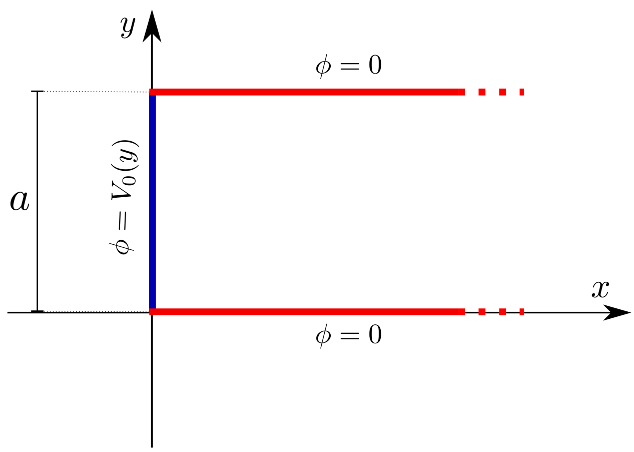
Bestimmen Sie das Potential $\phi(r,\theta)$, indem Sie die in 1.c) hergeleiteten Randbedingungen verwenden. Ihre Ergebnisse aus 1.b) und 1.d) sollten miteinander übereinstimmen.

Aufgabe 2: Leitende Platten (7 Punkte)

Betrachten Sie zwei Platten im Abstand a zueinander, die, wie unten abgebildet, den Halbebenen $(0 \leq x < +\infty) \times (-\infty < z < +\infty)$ bei $y = 0$ und $y = a$ entsprechen. Bei $x = 0$ sind die beiden Platten durch eine weitere, senkrechte Platte verbunden.

Die beiden parallelen Platten sind geerdet ($\phi = 0$), während die senkrechte das Potential $\phi = V_0(y)$ hat, wobei y der Abstand von der unteren Ebene ist





Das Potential zwischen den beiden parallelen Ebenen soll bestimmt werden.

2.a) Das Potential zwischen den beiden Platten $\phi(x, y)$ hängt nicht von z ab. Erklären Sie warum. Welche 4 Randbedingungen sind notwendig, um das Potential mit der Methode der Separation der Variablen zu bestimmen?

2.b) Betrachten Sie das Potential $\phi(x, y) = \phi_x(x)\phi_y(y)$ und bestimmen Sie durch Separation der Variablen die Differentialgleichungen für $\phi_x(x)$ und $\phi_y(y)$ für ein allgemeines $V_0(y)$.

2.c) Lösen Sie nun die beiden Differentialgleichungen und setzen Sie die in der ersten Teilaufgabe bestimmten Randbedingungen ein, mit Ausnahme der Randbedingung bei $x = 0$.

An dieser Stelle sollten Sie eine Lösungsfamilie der Form $\phi(x, y) = C_n f(\omega_n x) g(\omega_n y)$ gefunden haben.

2.d) Das Potential der verbindenden Platte sei nun gegeben als $V_0(y) = V_0\, y\, (a - y)$. Bestimmen Sie $\phi(x, y)$. Um die Koeffizienten zu finden, muss man die Randbedingung in $x = 0$ aufstellen und die Orthornormalitätseigenschaften ausnutzen.

Aufgabe 3: Legendre Polynome (6 Punkte + 2 Extra)

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Legendre-Polynome $P_\lambda(x)$ die folgende Differentialgleichung lösen:

$$(1-x^2)P_\lambda''(x) - 2xP_\lambda'(x) + \lambda P_\lambda(x) = 0\ . \tag{2}$$

3.a) Zeigen Sie durch Einsetzen von $P_\lambda(x) = \sum_{k=0} a_k x^k$ in die Legendre-Gleichung, dass die folgende Rekursionsformel hergeleitet werden kann:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)} a_k. \tag{3}$$

3.b) Zeigen Sie, dass die Reihe $P_\lambda(x) = \sum_k a_k x^k$ für $x = 1$ divergiert, es sei denn $\lambda = l(l+1)$.

Da nun gezeigt wurde, dass $\lambda = l(l+1)$ ist, identifizieren wir im Folgenden die Legendre-Polynome $P_l(x)$ mit l und nicht mit λ.

3.c) Bestimmen Sie $P_4(x)$ mit Hilfe der Rekursionsformel und den Eigenschaften der Legendre-Polynome.

3.d) Zeigen Sie, dass Legendre-Polynome orthogonal sind, also:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x P_l(x) P_m(x) = 0 \qquad \text{for } l \neq m \tag{4}$$

Hinweis: Multiplizieren Sie zunächst die Legendre-Gleichung mit $P_m(x)$. Sie können auch die Legendre-Gleichung in einer kompakteren Form umschreiben.

Bonusaufgabe (2 Punkte)
Eine andere Möglichkeit, die Legendre-Polynome herzuleiten, ist die erzeugende Funktion:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l \tag{5}$$

wobei $|x| \leq 1$ und $|t| < 1$.

3.e) Da $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, muss gelten

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0} \frac{A_l}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) \tag{6}$$

für $r' < r$. Verwenden Sie diese Gleichung, um Gl. (5) herzuleiten.

3.f) Verwenden Sie die erzeugende Funktion, um die ersten Polynome $P_0(x)$, $P_1(x)$ und $P_2(x)$ zu berechnen.