

Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Übungsblatt 4

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

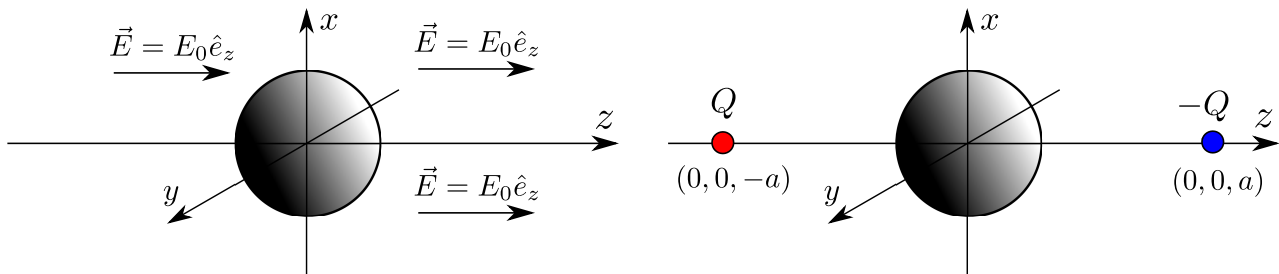
Ausgabe: 20.11.2023, Abgabe: 27.11.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 29.11.2023

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Kugel im homogenen E-Feld (7 P)

Sie haben sicher schon festgestellt, dass man in der Elektrodynamik dasselbe Problem auf unterschiedliche Weisen lösen kann. In dieser Übung geht es um ein Problem, das mit der Spiegelladungsmethode oder dem Ansatz der Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Wir betrachten eine Kugel mit dem Radius R in einem konstanten Feld $\vec{E}$. Wir können der Einfachheit halber annehmen, dass dieses Feld in z -Richtung zeigt, also $\vec{E} = E_0 \hat{e}_z$ wie in der nachfolgenden Abbildung. Zur Erinnerung: Im vorherigen Übungsblatt haben wir gelernt, dass das Spiegelbild einer Ladung q im Abstand a von einer Kugel mit dem Radius R eine Ladung $q' = -q \frac{R}{a}$ im Abstand $b = \frac{R^2}{a} < R$ ist.



- 1.a) Eine Möglichkeit, ein annähernd konstantes Feld $\vec{E} = E_0 \hat{e}_z$ um den Ursprung zu erzeugen, besteht darin zwei Ladungen Q und $-Q$ an die Orte $(0, 0, -a)$ bzw. $(0, 0, a)$ zu setzen. Bestimmen Sie die Ladung Q als Funktion von a und E_0 , so dass das elektrische Feld in der Nähe des Ursprungs (also für Orte mit $r \ll a$) E_0 entspricht.
- 1.b) Betrachten Sie nun eine leitende Kugel mit dem Radius R im Ursprung, die in das elektrische Feld $\vec{E} = E_0 \hat{e}_z$ eingetaucht ist. Leiten Sie mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen und der im vorigen Punkt hergeleiteten Äquivalenz das Potential $\phi(r, \theta)$ in der Nähe der Kugel her.
- 1.c) Vergessen Sie nun, was Sie in den Teilaufgaben 1.a) und 1.b) gelernt haben und betrachten Sie erneut eine leitenden Kugel im Ursprung, die einem konstanten Feld E_0 ausgesetzt ist. Welche Randbedingung muss das Potential ϕ auf der Kugel ($r = R$) erfüllen? Warum gilt $\phi(\vec{r}) \approx c - E_0 z$ für $z = r \cos \theta \gg R$ und eine geeignete Konstante c ?
- 1.d) Das Potential im Fall der azimuthalen Rotationssymmetrie (Unabhängigkeit von φ) kann geschrieben

werden als

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (1)$$

wobei P_l die Legendre-Polynome sind.

Bestimmen Sie das Potential $\phi(r, \theta)$, indem Sie die in 1.c) hergeleiteten Randbedingungen verwenden. Ihre Ergebnisse aus 1.b) und 1.d) sollten miteinander übereinstimmen.

Lösung zu Aufgabe 1:

1.a) (1.5 punkte)

$$\vec{E} = \frac{kQ}{a^2} \hat{e}_z + \frac{kQ}{a^2} \hat{e}_z = 2 \frac{kQ}{a^2} \hat{e}_z = E_0 \hat{e}_z \rightarrow Q = \frac{a^2 E_0}{2k} \quad (2)$$

Das Feld setzt sich aus der Summe der beiden Felder zusammen (die beide in die positive Richtung z zeigen).

In der Nähe des Ursprungs (bei einem Abstand r) gibt es nur Korrekturen der Ordnung $(r/a)^2$. Zum Beispiel an $(0, 0, r)$ haben wir

$$\vec{E} = \frac{kQ}{(a+r)^2} \hat{e}_z + \frac{kQ}{(a-r)^2} \hat{e}_z = 2kQ \frac{a^2 + r^2}{(a^2 - r^2)^2} \hat{e}_z \quad (3)$$

1.b) (2 punkte)

Nun wird das Potential durch die Summe der Potenziale der vier Ladungen gegeben.

Um die Abstände zu finden, werden wir die Kosinussätze viermal verwenden. In allen Fällen ist eine der Seiten des Dreiecks r und die andere ist bekannt. Der Winkel zwischen den Dreiecksseiten ist θ (für die Ladungen auf der positiven z -Achse) oder $\pi - \theta$ (für die Ladungen auf der negativen z -Achse). Dann erhalten wir (die Potenziale von links nach rechts auf der z -Achse summierend):

$$\phi(r, \theta) = kQ \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta}} - \frac{R}{a} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{R^2}{a^2} + 2\frac{R^2 r}{a} \cos \theta}} + \right. \quad (4)$$

$$\left. + \frac{R}{a} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{R^2}{a^2} - 2\frac{R^2 r}{a} \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} \right) \quad (5)$$

Substituiert man $Q = \frac{a^2 E_0}{2k}$ und behält nur die führenden Terme in r/a und R/a bei, erhalten wir:

$$kQ \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 \pm 2ra \cos \theta}} = \frac{E_0 a}{2} \mp a \frac{1}{2} E_0 r \cos \theta + h.o. \quad (6)$$

$$kQ \frac{R}{a} \frac{1}{\sqrt{r^2 \pm \frac{R^2}{a^2} + 2\frac{R^2 r}{a} \cos \theta}} = \frac{E_0 R a}{2r} \mp a \frac{E_0 R^3 \cos \theta}{2r^2} + h.o. \quad (7)$$

Unendlichkeiten heben sich auf, und wir erhalten:

$$\phi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (8)$$

1.c) (1 punkt)

Die beiden Bedingungen für das Potenzial sind, dass es auf der Oberfläche der leitenden Kugel konstant ist ($r = R$) und dass es bei Unendlich durch Integration des konstanten Feldes entlang z konstant wird, also sollte es $V(r \cos \theta) = V(z) = V(z = 0) - E_0 z$ sein. Wir können die Konstanten bestimmen, indem wir verlangen, dass das Potential auf der Oberfläche 0 ist, was auch impliziert, dass $V(z = 0) = 0$ ist.

1.d) (2.5 punkte)

Wir wenden die Randbedingungen an.

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = 0 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \rightarrow B_l = -A_l R^{2l+1} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l - A_l \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \end{cases} \quad (9)$$

Aus der zweiten Gleichung bleibt nur der Term mit $l = 1$. Wir erhalten:

$$A_1 r \cos \theta + o\left(\frac{R^3}{r^2}\right) = -E_0 r \cos \theta \quad (10)$$

und so $A_1 = -E_0$. Beachten Sie, dass die zweite Bedingung für $r \gg R$ gilt. Wir schließen daraus, dass das Potential die folgende Form hat:

$$\phi(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (11)$$

Nachtrag zu Blatt 4, Aufgabe 3b)

Wir wollen zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (55)$$

mit $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ und

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k \quad (56)$$

divergiert, wenn die Abbruchbedingung $\lambda = l(l+1)$ nicht erfüllt ist. Dazu nutzen wir das Minorantenkriterium, d.h. wir zeigen, dass es eine divergente Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad (57)$$

gibt, für die gilt: Es gibt ein $k_{\min}$ so dass $a_k \geq b_k$ für $k > k_{\min}$. Als divergente Reihe wählen wir $b_k = \frac{1}{k \log k}$ für k gerade und $b_k = 0$ für k ungerade. Es reicht zu zeigen, dass

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} > \frac{b_{2k+2}}{b_{2k}} \quad (58)$$

für $k > k_{\min}$ oder äquivalent

$$1 < \frac{a_{2k+2} b_{2k}}{a_{2k} b_{2k+2}} = \left(1 - \frac{\lambda}{(2k+1)(2k)} \right) \frac{\log(2k+2)}{\log(2k)} \quad (59)$$

Für große k können wir diesen Ausdruck nähern als

$$0 < \frac{1}{k \log(2k)} - \frac{\lambda}{4k^2} \quad (60)$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für $4k > \lambda \log(2k)$.

Der Beweis für $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ verläuft analog. Daraus folgt ebenfalls, dass für $a_0 \neq 0$ und $a_1 \neq 0$ die Reihe nur dann *absolut* konvergiert, wenn $\lambda = l(l+1)$ mit einer natürlichen Zahl l .