Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 5

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 27.11.2023, Abgabe: 04.12.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 06.12.2023

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Multipolentwicklung (8 Punkte)

Das am Ort $\vec{r}$ von einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,')$ erzeugte Potenzial ist allgemein gegeben durch:

$$\phi(\vec{r}) = k \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \tag{1}$$

Dies kann durch Entwicklung in Kugelflächenfunktionen als

$$\phi(\vec{r}) = k \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad \text{mit } q_{lm} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') r'^l Y^*_{lm}(\theta', \phi') \tag{2}$$

geschrieben werden, wobei q_{lm} die Multipolmomente in Kugelkoordinaten sind. Insbesondere sind q_{2m} die Quadrupolmomente in Kugelkoordinaten.

1.a) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Entwickelung von $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ in kartesischen Koordinaten ($\vec{r} = (x, y, z)$), dass

$$\phi(\vec{r}) = k\frac{q}{r} + k\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{k}{2} \sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} + \ldots, \quad \text{mit } Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')(3r'_i r'_j - \vec{r}\,'^2\, \delta_{ij}). \tag{3}$$

wobei $\vec{p} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')$ das Dipolmoment und Q_{ij} die Quadrupolmomente in kartesischen Koordinaten sind.

1.b) Zeigen Sie, dass wenn die Gesamtladung und das Dipolmoment verschwinden, die Quadrupolmomente in kartesischen Koordinaten unter einer Verschiebung des Ursprungs um einen Abstand $\vec{d}$ unverändert bleiben.

Kommentar: Dieses Ergebnis ist sogar allgemeingültig. Das niedrigste nicht verschwindende Multipolmoment ist immer unabhängig vom Ursprung des Systems.

1.c) Zeigen Sie, dass der kartesische Quadrupol Q_{33} proportional zum sphärischen Quadrupol q_{20} ist.

1.d) Berechnen Sie die Monopol-, Dipol- und Quadrupolterme in kartesischen Koordinaten für die Ladungskonfiguration in Abb. 1.

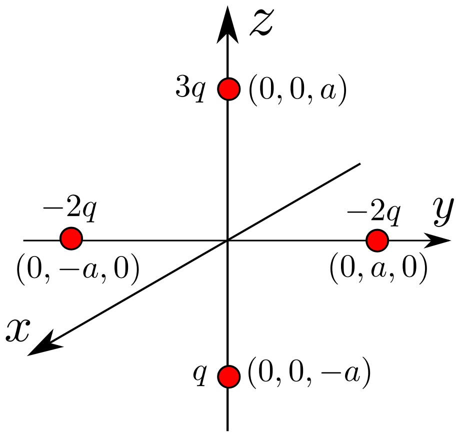

Figure 1: Vier Ladungen sind bei einem Abstand a vom Ursprung.

1.e) Multipole zu bestimmen kann sehr nützlich sein, jedoch auch mühsam. Daher ist es einfacher, die Aufgabe mithilfe von Python zu lösen. Auf ILIAS finden Sie ein Beispiel-Jupyter-Notebook, in dem die sphärischen Multipole für eine diskrete Ladungsverteilung berechnet werden. Verwenden Sie dieses Notebook, um zu überprüfen, dass der Zusammenhang zwischen Q_{33} und q_{20}, den sie in der Teilaufgabe 1.c) bestimmt haben, für die Ladungskonfiguration aus 1.d) erfüllt ist. Bestimmen Sie mithilfe des Notebooks die restlichen sphärischen Quadrupolmomente. Es ist ausreichend, die numerischen Ergebnisse in Ihrer Lösung ohne weitere Berechnung anzugeben.

Aufgabe 2: Vektorpotential (4 Punkte)

In der Elektrostatik haben Sie den folgenden Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld $\vec{E}$ und dem Skalarpotential gesehen:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi\ . \tag{4}$$

Im Fall der Magnetostatik haben wir ein Vektorpotential $\vec{A}$, das über die Rotation vom magnetischen Feld definitert ist

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\ . \tag{5}$$

2.a) Betrachten Sie ein Vektorpotential $\vec{A}$, das die Coulomb-Eichung erfüllt. Ändern Sie nun das Vektorpotential zu $\vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, wobei χ die Laplace-Gleichung erfüllt. Ändert sich das erzeugte Magnetfeld? Befindet sich das neue Vektorpotential immer noch in der Coulomb-Eichung?

2.b) Betrachten Sie $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$ für ein konstantes Magentfeld $\vec{B}$. Zeigen Sie, dass dieses Vektorpotential die Coulomb-Eichung erfüllt und $\vec{B}$ erzeugt.

2.c) Betrachten Sie die beiden magnetischen Potenziale (in zylindrischen Koordinaten), die für $\rho < R$ definiert sind:

$$\vec{A}_1 = A(\rho^2 - R^2)\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}\,. \tag{6}$$

$$\vec{A}_2 = (A(\rho^2 - R^2) + f(z))\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \tag{7}$$

mit einer differenzierbaren Funktion $f(z)$. Sind sie physikalisch äquivalent? Welche Stromdichte würden sie erzeugen?

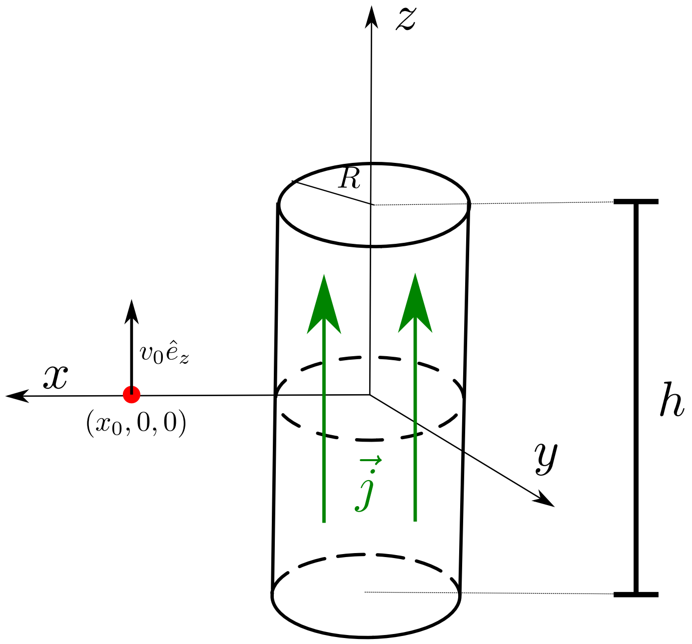

Figure 2: Zylinder mit Stromfluss $\vec{J}$ und Testladung q an der Position $\vec{r} = x_0\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$ und Geschwindigkeit $v_0\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$.

Aufgabe 3: Strom in einem Zylinder (8 Punkte)

Betrachten Sie einen leitenden Zylinder mit Radius R und Höhe h wie in Abb. 2 dargestellt. Es gilt $h \gg R$, sodass der Zylinder als unendlich lang approximiert werden kann. Ein konstanter Strom fließt durch den Zylinder durch mit einer Stromdichte $\vec{j} = j_0 \frac{\rho}{R}\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$, wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ die radiale Koordinate bezeichnet.

3.a) Was ist der Gesamtstrom I durch den Zylinder?

3.b) Wie lautet das magnetische Feld innerhalb und außerhalb des Zylinders?
Hinweis: Sie können das Ampèresche Gesetz verwenden.

3.c) Betrachten Sie eine Testladung mit Ladung q und Masse m außerhalb des Zylinders, die in der xz-Ebene liegt und mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(t = 0) = (0, 0, v_0)$ und der Anfangsposition $\vec{r}(t = 0) = (x_0, 0, 0)$ startet. Welche Differentialgleichungen gelten für die Komponenten von $\vec{r}(t)$? Hier können Sie für eine kürzere Schreibweise das Magnetfeld als $B(\rho) = \frac{m\,\alpha}{q\,\rho}$ mit einer geeigneten Konstante α schreiben.

3.d) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für z umgeschrieben werden kann als

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha \log(x) + c_1. \tag{8}$$

Bestimmen Sie c_1 aus den Anfangsbedingungen.

3.e) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für x umgeschrieben werden kann als

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-\alpha^2 \log^2\left(\frac{x}{x_0}\right) - 2\alpha v_0 \log x + c_2} \tag{9}$$

Bestimmen Sie c_2 aus den Anfangsbedingungen.

3.f) Was ist der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}(t)|$ zu einer beliebigen Zeit t? Warum ist dieser konstant?