Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 6

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 04.12.2023, Abgabe: 11.12.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 13.12.2023

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Stetigkeit des Vektorpotenzials und Spulen(5 P)

In der folgenden Aufgabe werden wir die Stetigkeitseigenschaften des magnetischen Vektorpotenzials herleiten und sehen, wie diese in der Praxis nützlich sein können.

1.a) Betrachten Sie eine stromdurchflossene Ebene. Zeigen Sie, dass das Vektorpotenzial $\vec{A}$ an der Oberfläche stetig ist, d.h. $\vec{A}_{\text{oben}} = \vec{A}_{\text{unten}}$.
Hinweis: Sie können sich an den Herleitungen der Stetigkeitseigenschaften des B-Feldes aus der Vorlesung orientieren. Betrachten Sie zudem die senkrechten und tangentialen Komponenten getrennt von einander.

1.b) Sie haben während der Vorlesung wurde das Beispiel einer unendlichen Spule mit einem Strom I, der gegen den Uhrzeigersinn fließt besprochen. Dabei haben Sie gelernt, dass das B-Feld im Innenraum durch $\vec{B} = \frac{\mu_0 N_w I}{ds}\,\hat{e}_z = \mu_0 n I\,\hat{e}_z$ gegeben ist, wobei n die Windungsdichte und μ_0 die Permeabilität des Vakuums ist, und, dass es außerhalb der Spule verschwindet. Verwenden Sie die Beziehung zwischen $\vec{B}$ und $\vec{A}$, um das Vektorpotenzial in beiden Regionen zu bestimmen. Unter Verwendung der Stetigkeitsbedingung können alle Konstanten bestimmt werden. Denken Sie daran, dass $\vec{A}$ aus Symmetriegründen nur von ρ abhängen kann.

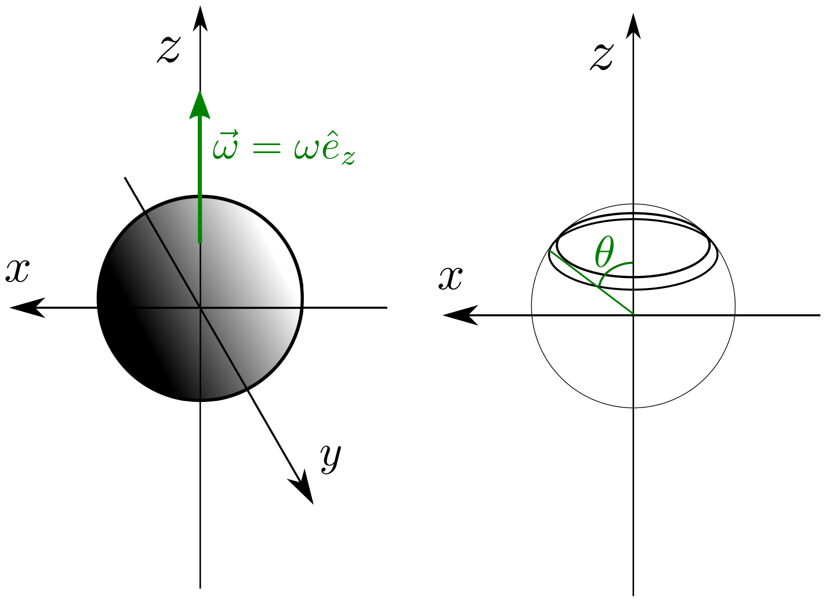
1.c) Betrachten Sie nun zwei konzentrische Spulen. Die innere hat einen Radius a, eine Windungsdichte n_{in} und einen im Uhrzeigersinn fließenden Strom I. Die äußere hat einen Radius $b > a$, eine Windungssdichte n_{out} und einen gegen den Uhrzeigersinn fließenden Strom I. Bestimmen Sie das Magnetfeld für $\rho < a$, $a < \rho < b$ und $b < \rho$.

Hinweis: Die auf dem letzten Übungsblatt hergeleitete Formel $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$ reicht zur Lösung dieser Aufgabe nicht aus. Die allgemeine Form lautet $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B} + \vec{\nabla}\chi$ with $\Delta\chi = 0$. Sie können Aufgabe 1.c) aber auch ohne Vektorpotenziale lösen.

Aufgabe 2: Rotierende hohle Kugel (7 Punkte + 2 Extra)

Betrachten Sie eine Kugelschale mit Radius R und Oberflächenladung σ, die mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_z$ rotiert, siehe die Abbildung unten. Das Vektorpotenzial der Sphäre in Kugelkoordinaten ist gegeben durch:

$$\vec{A}(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin\theta\,\hat{e}_\varphi, & \text{für } r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega\sigma}{3}\frac{\sin\theta}{r^2}\,\hat{e}_\varphi, & \text{für } r > R \end{cases} \tag{1}$$



2.a) Bestimmen Sie das Magnetfeld aus dem Vektorpotential.

2.b) Die Kugelschale kann als betrachtet werden als bestehe sie aus infinitesimalen Ringen für jeden Wert des Polarwinkels θ, wie auf der rechten Seite auf der Abbildung oben zu sehen ist. Berechnen Sie die Ladung $\mathrm{d}q$ der infinitesimalen Ringe als Funktion von θ.

2.c) Da die infinitesimalen Ringe rotieren, erzeugen sie ein Strom und geben einen Beitrag zum magnetischen Dipolmoment der Kugelschale

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{3}\sigma\omega R^4 \hat{e}_z. \tag{2}$$

Leiten Sie diesen Ausdruck her.

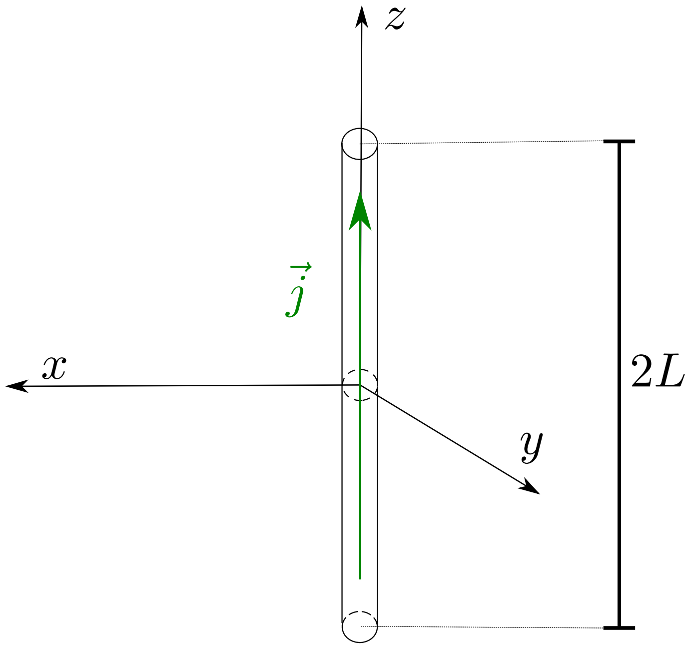
2.d) Berechnen Sie den Beitrag des Dipols zum Vektorpotenzial außerhalb der Sphäre. Was ist der Unterschied zwischen dem vollständigen Vektorpotential außerhalb der Kugel in Gleichung (1) und dem Dipolterm?

2.e) **Bonusaufgabe (2 Punkte)**:
Leiten Sie das Vektorpotential Gleichung (1) her.

Aufgabe 3: (Un)endlicher stromdurchflossener Draht (8 P)

In dieser Übung werden Sie sehen, dass man Unendlichkeiten mit Vorsicht behandeln muss, andernfalls kann man sich täuschen lassen und zu irreführenden Schlussfolgerungen gelangen.

Betrachten Sie einen 1D-Draht mit der Stromdichte $\vec{j} = I\,\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}\,\delta(x)\delta(y)$ und nehmen Sie an, dass der Draht entlang der z-Achse liegt.



3.a) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ des Drahtes unter der Annahme, dass er unendlich lang ist, und mithilfe der folgenden Formel

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}. \tag{3}$$

Es reicht zu zeigen, dass das Vektorpotenzial in der folgenden Form geschrieben werden kann

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I\, \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}. \tag{4}$$

3.b) Was passiert wenn Sie versuchen, $\vec{A}$ explizit zu bestimmen? Was bekommen Sie, wenn Sie $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ berechnen?

3.c) Betrachten Sie nun stattdessen einen Draht endlicher Länge $2L$, wie in der Abbildung oben zu sehen, und berechnen Sie das magnetische Vektorpotential bei einer Höhe z und einem Abstand ρ, wobei $-L < z < L$. Sie können Ihre Antwort in Integralform angeben.

3.d) Nutzen Sie nun die asymptotische Näherung

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \overset{X \gg 1}{\approx} \log X + \log 2 + \mathcal{O}(\frac{1}{X}), \tag{5}$$

um das in der vorherigen Teilaufgabe hergeleitete Integral auszuführen.

3.e) Was passiert nun, wenn Sie $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ berechnen? Ist dies konsistent mit dem, was Sie aus der Vorlesung über magnetische Felder von Drähten wissen?

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\mathrm{e}}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\hat{\mathrm{e}}_{\varphi} \tag{6}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (A_\theta \sin\theta)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{7}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (A_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{\mathrm{e}}_{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r)}{\partial \theta}\right)\hat{\mathrm{e}}_{\varphi} \tag{8}$$