Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 7

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

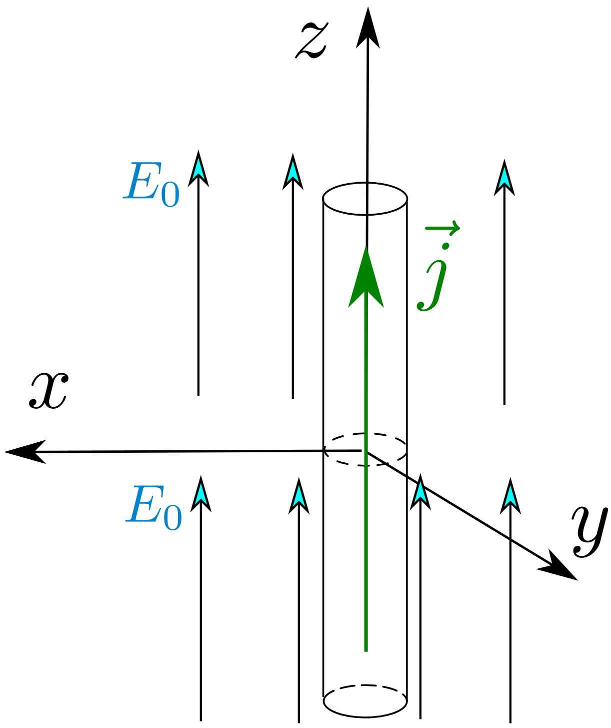
Ausgabe: 11.12.2023, Abgabe: 18.12.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 10.01.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Poynting-Vektor (5 P)

In dieser Aufgabe werden Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ berechnen und ihn dazu benutzen, Informationen über das physikalische System herzuleiten.

Betrachten Sie dazu ein Draht mit dem Radius R in einem elektrischen Feld $\vec{E}$. Durch das elektrische Feld wird die Stromdichte $\vec{j} = \kappa\vec{E}$ innerhalb des Drahtes induziert. Die Proportionalitätskonstante κ ist hier die Leitfähigkeit des Materials. Der Draht liegt entlang der z-Achse und das elektrische Feld sei gegeben als $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}$, wie in der Abbildung unten zu sehen. Der Einfachheit halber können Sie annehmen, dass der Draht unendlich lang ist.



1.a) Berechnen Sie das magnetische Feld, das innerhalb und außerhalb des Drahtes erzeugt wird.

1.b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor innerhalb und außerhalb des Drahtes gemäß der Definition:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \tag{1}$$

1.c) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E}$. Diskutieren Sie die physikalische Interpretation des Ergebnisses.

Aufgabe 2: Spulen und Induktivität (6 P)

In dieser Aufgabe lernen Sie das Konzept der wechselseitigen Induktivität kennen. Diese beschreibt den magnetischen Fluss, der von einem elektrischen Bauteil, meist Spulen, in einem anderen induziert wird. Dazu betrachten wir eine Leiterschleife S_1 mit dem Strom I_1, welche das Magnetfeld $\vec{B}_1$ erzeugt.

2.a) Zeigen Sie, dass der magnetische Fluss Φ_2^{m} durch eine zweite Leiterschleife S_2 proportional zum Strom I_1 in der ersten Leiterschleife ist.

Die Proportionalitätskonstante zwischen Φ_2^{m} und I_1 wird Induktivität M_{21} genannt:

$$\Phi_2^{\mathrm{m}} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 \equiv M_{21} I_1, \tag{2}$$

Dabei bezeichnet S_2 die Oberfläche der Leiterschleife mit Rand ∂S_2.

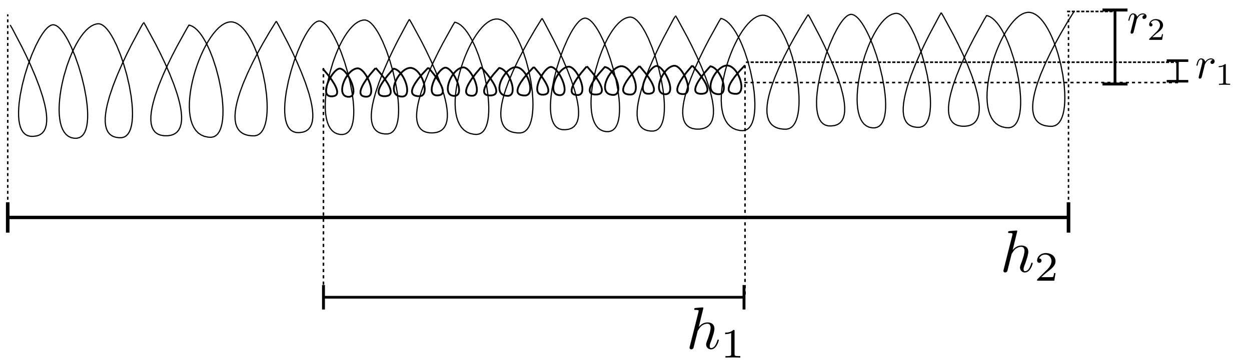
2.b) Leiten Sie die folgende Gleichung, auch als Neumann-Kurvenintegral bekannt, her

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{3}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1$.

Diese Gleichung verrät uns zwei Dinge über die wechselseitige Induktivität: Zum einen ist die Induktivität eine Eigenschaft, die allein von der Geometrie des Problems abhängt, und zum anderen ist sie symmetrisch: $M_{12} = M_{21}$. Diese zweite Eigenschaft impliziert, dass der Fluss, der von der ersten Leiterschleife in der zweiten induziert wird, der gleiche ist wie der Fluss, den der gleiche Strom durch die zweite Leiterschleife in der ersten induzieren würde.

Betrachten Sie nun zwei konzentrische Spulen, wie in der Abbildung unten zu sehen. Die innere, kürzere Spule hat die Länge h_1, den Radius r_1 und die Windungsdichte n_1. Die äußere Spule ist sehr viel größer als die innere und hat die Länge $h_2 \gg h_1$, den Radius $r_2 \gg r_2$ und die Windungsdichte n_2.



2.c) Durch die innere Spule fließe nun der Strom I und erzeuge das Magnetfeld $\vec{B}_1$. Was ist der magnetische Fluss durch die Leiterschleifen der äußeren Spule? Berechnen Sie die wechselseitige Induktivität M_{12}.

Hinweis: Berechnen Sie *nicht* $\vec{B}_1$ und den zugehörigen Fluss.

Aufgabe 3: Magnetische Monopole (9 P)

Wenn man die Maxwell-Gleichungen betrachtet, fällt auf, dass es einen Term für die Quellen von elektrischen Feldern gibt ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$) jedoch keinen analogen Term für Quellen von magnetischen Feldern ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$). In dieser Aufgabe betrachten wir, was die Folgen wären, gäbe es einen solchen Term.

Die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von magnetischen Ladungsdichten ρ_m und dazugehörigen magnetischen Stromdichten $\vec{j}_m$ sind:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} & = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} & = \mu_0 \rho_m \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} & = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j}_m \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} & = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}_e \end{cases} \tag{4}$$

Die Felder an dem Punkt $\vec{r}$, die durch eine elektrische b.z.w. magnetische Ladung an der Position $\vec{r}'$ sind jeweils:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \tag{5}$$

3.a) Zeigen Sie, dass für die magnetische Ladung und Stromdichte eine Kontinuitätsgleichung analog zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

gilt.

3.b) In Anwesenheit magnetischer Ladungen verallgemeinert sich die Lorentzkraft zu

$$\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m(\vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}). \tag{7}$$

Betrachten Sie nun, wie in der Vorlesung, die Beziehung $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ und zeigen Sie, dass das Poynting-Theorem noch immer gilt:

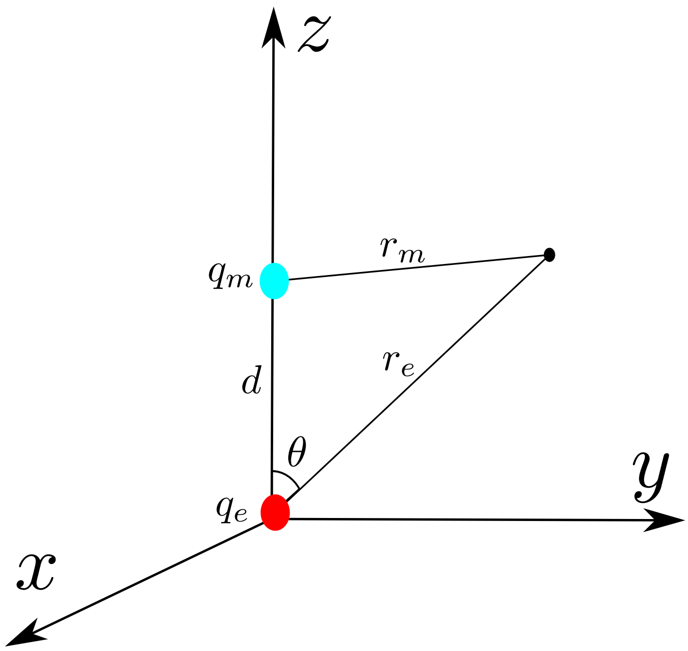
$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j}_e \cdot \vec{E} - \vec{j}_m \cdot \vec{B} \tag{8}$$

3.c) Gegeben sei nun die elektrische Ladung q_e und eine magnetische (Monopol-)Ladung q_m, welche voneinander durch dem Abstand $\vec{d} = d\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$ getrennt sind, wie in der Abbildung unten zu sehen. Die elektrische Drehimpulsdichte lässt sich wie folgt berechnen

$$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \left(\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}\right) = \epsilon_0\mu_0 \vec{r} \times \vec{S}. \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass der elektromagnetische Drehimpuls $\vec{L}_{em} = \int_V \vec{l}_{em}\, \mathrm{d}V$ gegeben ist durch:

$$\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m\, \hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}\,. \tag{10}$$



3.d) Nehmen Sie nun an, dass wegen eines seltsamen Grunds (auch als Quantenmechanik bekannt) der Drehimpuls $\vec{L}_{em}$ keine kontinuierlichen Werte annehmen kann, sondern lediglich die quantisierten Werte $\vec{L}_{em} = \alpha n$, mit $n \in \mathbb{N}$. Was würde nun die Anwesenheit eines magnetischen Monopols für die elektrische Ladung q_e implizieren?

Hinweis: Um das Integral in der Berechnung von $\vec{L}_{em}$ auszuführen, ist es nützlich sphärische Koordinaten und die Substitution $u = \cos\theta$ zu verwenden. Auch gilt

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \frac{r}{(r^2 - 2rdu + d^2)^{3/2}} = \int_0^\infty \mathrm{d}r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \frac{\alpha r + \beta}{\sqrt{r^2 - 2rdu + d^2}} = \left. \frac{\alpha r + \beta}{\sqrt{r^2 - 2rdu + d^2}} \right|_0^\infty = \alpha - \frac{\beta}{d} \tag{11}$$

für entsprechende Werte von α und β.