

Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Übungsblatt 7

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Abgabe: 11.12.2023, Abgabe: 18.12.2023 10:00 Uhr, Tutorium: 10.01.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 3: Magnetische Monopole

(9 P)

Wenn man die Maxwell-Gleichungen betrachtet, fällt auf, dass es einen Term für die Quellen von elektrischen Feldern gibt ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$) jedoch keinen analogen Term für Quellen von magnetischen Feldern ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$). In dieser Aufgabe betrachten wir, was die Folgen wären, gäbe es einen solchen Term.

Die Maxwell-Gleichungen in Anwesenheit von magnetischen Ladungsdichten ρ_m und dazugehörigen magnetischen Stromdichten $\vec{j}_m$ sind:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \mu_0 \rho_m \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j}_m \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}_e \end{cases} \quad (1)$$

Die Felder an dem Punkt $\vec{r}$, die durch eine elektrische b.z.w. magnetische Ladung an der Position $\vec{r}'$ sind jeweils:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (2)$$

3.a) Zeigen Sie, dass für die magnetische Ladung und Stromdichte eine Kontinuitätsgleichung analog zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

gilt.

3.b) In Anwesenheit magnetischer Ladungen verallgemeinert sich die Lorentzkraft zu

$$\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q_m(\vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}). \quad (4)$$

Betrachten Sie nun, wie in der Vorlesung, die Beziehung $\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ und zeigen Sie, dass das Poynting-Theorem noch immer gilt:

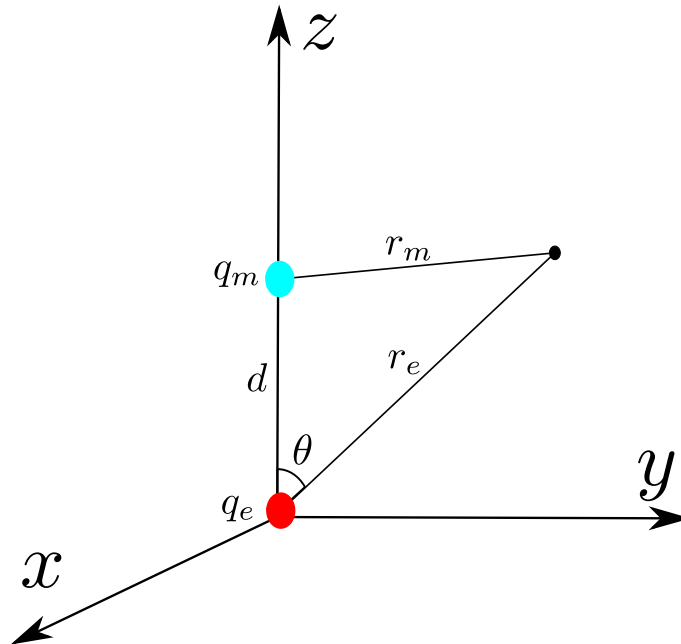
$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j}_e \cdot \vec{E} - \vec{j}_m \cdot \vec{B} \quad (5)$$

- 3.c) Gegeben sei nun die elektrische Ladung q_e und eine magnetische (Monopol-)Ladung q_m , welche voneinander durch dem Abstand $\vec{d} = d\hat{e}_z$ getrennt sind, wie in der Abbildung unten zu sehen. Die elektrische Drehimpulsdichte lässt sich wie folgt berechnen

$$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times (\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times \vec{S}. \quad (6)$$

Zeigen Sie, dass der elektromagnetische Drehimpuls $\vec{L}_{em} = \int_V \vec{l}_{em} dV$ gegeben ist durch:

$$\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \hat{e}_z. \quad (7)$$



- 3.d) Nehmen Sie nun an, dass wegen eines seltsamen Grundes (auch als Quantenmechanik bekannt) der Drehimpuls $\vec{L}_{em}$ keine kontinuierlichen Werte annehmen kann, sondern lediglich die quantisierten Werte $\vec{L}_{em} = \alpha n$, mit $n \in \mathbb{N}$. Was würde nun die Anwesenheit eines magnetischen Monopols für die elektrische Ladung q_e implizieren?

Hinweis: Um das Integral in der Berechnung von $\vec{L}_{em}$ auszuführen, ist es nützlich sphärische Koordinaten und die Substitution $u = \cos \theta$ zu verwenden. Auch gilt

$$\int_0^\infty dr \frac{r}{(r^2 - 2rdu + d^2)^{3/2}} = \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \frac{\alpha r + \beta}{\sqrt{r^2 - 2rdu + d^2}} = \frac{\alpha r + \beta}{\sqrt{r^2 - 2rdu + d^2}} \Big|_0^\infty = \alpha - \frac{\beta}{d} \quad (8)$$

für entsprechende Werte von α und β .

Lösung zu Aufgabe 3:

Lösung 3.a)

(1.5 Punkte)

Die Kontinuitätsgleichung können wir herleiten, indem wir geschickt die Divergenz der Rotation des elektrischen Feldes umschreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j}_m \right) = -\frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m = -\frac{\partial(\mu_0 \rho_m)}{\partial t} - \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m. \quad (9)$$

Also erhalten wir

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m = 0 \quad (10)$$

Lösung 3.b)**(2.5 Punkte)**

Wir beginnen mit dem Skalarprodukt, wie in der Aufgabenstellung angedeutet, mit $dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} + q_m(\vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot (q_e \vec{v}) + \vec{B} \cdot (q_m \vec{v}) = \vec{E} \cdot \vec{j}_e + \vec{B} \cdot \vec{j}_m \quad (11)$$

die Terme mit der Rotation verschwinden hier, da allgemein $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ gilt. Die Ausdrücke für die Stromdichten lassen sich aus den modifizierten Maxwell Gleichungen herleiten:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \vec{B} \cdot \left(-\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (12)$$

Zusammen mit der Definition des Poynting-Vektors erhalten wir $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{E} \cdot \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} + \vec{B} \cdot \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (13)$$

Die restlichen Terme können wir vereinfachen, da für ein Vektorfeld gilt $\vec{C} \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = \frac{\partial (\vec{C})^2}{\partial t}$. Damit erhalten wir nun

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j}_e \cdot \vec{E} - \vec{j}_m \cdot \vec{B}. \quad (14)$$

Lösung 3.c)**(4 Punkte)**

Die elektrische Ladung sitzt im Ursprung, daher ist $\vec{r}_e = \vec{r}$, während für die magnetische Ladung $\vec{r}_m = \vec{r} - d \hat{z}$ gilt.

Damit erhalten wir für das magnetische und elektrische Feld

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} (\vec{r} - d \hat{z}), \quad (15)$$

$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (16)$$

Zusammen ergeben die Felder den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{q_e q_m}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\vec{r} \times (\vec{r} - d \hat{z})}{r^3 (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{dq_e q_m}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\vec{r} \times \hat{z}}{r^3 (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}}. \quad (17)$$

Die Drehimpulsdichte wird damit zu

$$\vec{l}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times \vec{S} = -\frac{dq_e q_m \mu_0}{16\pi^2} \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \hat{z})}{r^3 (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{dq_e q_m \mu_0}{16\pi^2} \frac{r^2 \cos \theta \hat{e}_r - r^2 \hat{e}_z}{r^3 (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} \quad (18)$$

Aus der Symmetrie des Problems wird klar, dass der Drehimpuls lediglich eine z -Komponente besitzen kann. Explizit wird das ersichtlich, wenn wir $\cos \theta \hat{e}_r$ über den Polarwinkel θ integrieren:

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Also berechnen wir lediglich die z Komponente des Drehimpuls:

$$L_{em}^z = -\frac{dq_e q_m \mu_0}{16\pi^2} \int r^2 dr d\cos \theta d\varphi \frac{r^2 (\cos^2 \theta - 1)}{r^3 (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{3/2}} \quad (20)$$

$$= -\frac{dq_e q_m \mu_0}{8\pi} \int_0^\infty dr \int_{-1}^1 du \frac{r(u^2 - 1)}{(r^2 + d^2 - 2rdu)^{3/2}}. \quad (21)$$

Mithilfe des Hinweises

$$\int_0^\infty dr \frac{r}{(r^2 - 2rdu + d^2)} = \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \frac{\alpha r + \beta}{\sqrt{r^2 - 2rdu + d^2}} = \frac{\alpha r + \beta}{\sqrt{r^2 - 2rdu + d^2}} \Big|_0^\infty = \alpha - \frac{\beta}{d}, \quad (22)$$

können wir das Integral lösen. Hier müssen wir lediglich die Koeffizienten α und β bestimmen. Dafür führen wir einfach die Ableitung des Integranden im zweiten Ausdruck aus und setzen ihn dem ersten Integranden gleich, damit erhalten wir

$$\alpha = -\frac{u}{d(u^2 - 1)}, \beta = \frac{1}{u^2 - 1} \rightarrow \alpha - \frac{\beta}{d} = -\frac{u + 1}{d(u^2 - 1)}. \quad (23)$$

Für den Drehimpuls erhalten wir schließlich

$$L_{em}^z = \frac{dq_e q_m \mu_0}{8\pi} \int_{-1}^1 du \frac{(u + 1)(u^2 - 1)}{d(u^2 - 1)} = \frac{q_e q_m \mu_0}{8\pi} \int_{-1}^1 du (u + 1) = \frac{q_e q_m \mu_0}{4\pi}. \quad (24)$$

Lösung 3.d)

(1 Punkte)

Die Konsequenz der Existenz eines magnetischen Monopols mit der Ladung q_m ist, dass die elektrische Ladung q_e keine beliebigen Werte annehmen kann, da das Produkt (das proportional zum Drehimpuls ist $L_{em}^z \propto q_e q_m$) ebenfalls keine beliebigen Werte annehmen kann, sondern nur $q_e q_m = \beta n$, mit $n \in \mathbb{N}$. Also gilt für die elektrische Ladung

$$q_e = \frac{\beta n}{q_m}. \quad (25)$$

Die Quantisierung und die Anwesenheit eines magnetischen Monopols würden also die Quantisierung der elektrischen Ladung zur Folge haben.