Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 8

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024
Ausgabe: 08.01.2024, Abgabe: 15.01.2024 10:00 Uhr, Tutorium: 17.01.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Sphärische elektromagnetische Wellen (8 P)

In dieser Aufgabe werden Sie sphärische Lösungen der Wellengleichung im Vakuum studieren. Die Ergebnisse werden verwendet, um Oszillationen von Feldern in der Erdatmosphäre zu beschreiben.

Betrachten Sie die Fouriertransformation von f

$$\tilde{f}(\vec{r},\omega) = \int \mathrm{d}t f(\vec{r},t) e^{-i\omega t}, \quad f(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega \tilde{f}(\vec{r},\omega) e^{i\omega t}. \tag{1}$$

Die Maxwell-Gleichungen im Fourierraum werden damit zu

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = -i\omega \tilde{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{B}} = i\frac{\omega}{c^2}\tilde{\vec{E}}, \quad \to \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{B}}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\vec{B}} \tag{2}$$

1.a) Für ein magnetisches Feld der Form $\vec{B} = f(\vec{r},t)\,\hat{\mathrm{e}}_\varphi$ in sphärischen Koordinaten gilt somit die folgende Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \tilde{f}(\vec{r},\omega)\,\hat{\mathrm{e}}_\varphi\right) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{f}(\vec{r},\omega)\,\hat{\mathrm{e}}_\varphi\,. \tag{3}$$

Betrachten Sie nun ein Problem mit azimutaler Rotationssymmetrie, bei dem die Lösung nicht von φ abhängt. In diesem Fall kann die Lösung durch Separation der Variablen ausgedrückt werden: $\tilde{f}(\vec{r},\omega) = \frac{u(r)}{r}P(\cos\theta)$ (im Weiteren werden wir die Abhängigkeit von ω nicht mehr ausschreiben). Zeigen Sie, dass die radiale und polare Komponente die folgende Gleichung erfüllen:

$$r^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \frac{r^2}{u(r)}\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{P(\cos\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(P(\cos\theta)\sin(\theta)\right)\right) = 0 \tag{4}$$

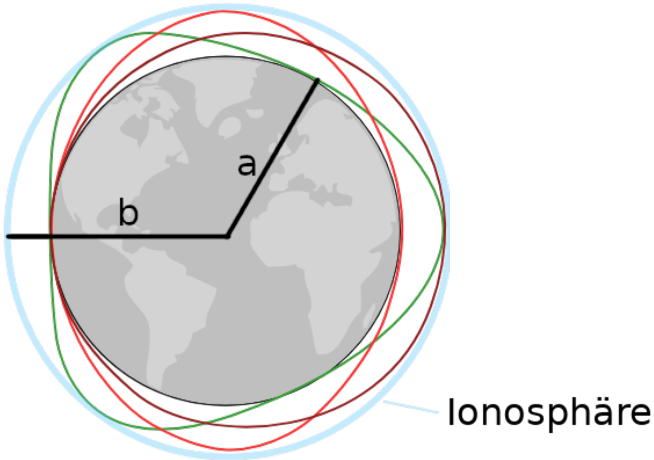
1.b) Zeigen Sie, dass $P(\cos\theta)$ die Legende-Gleichung für die assoziierten Legendre Polynome mit $m = 1$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{P(\cos\theta)}{\sin^2\theta} = -l(l+1)P(\cos\theta), \tag{5}$$

erfüllen muss. Zeigen Sie weiterhin, dass sich die Gleichung für die radiale Komponente somit vereinfacht zu:

$$\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)u(r) = 0\,. \tag{6}$$

Die Erdoberfläche und die Ionosphäre können als zwei konzentrische Oberflächen beschrieben werden. Der Radius der Erde sei durch a gegeben und die Ionosphäre durch den Radius b, wobei $b - a \ll a$ wie in der Abbildung unten zu sehen. Die zwei Regionen $r \leq a$ und $r \geq b$ können als Leiter beschrieben werden und die Region $a < r < b$ in erster Näherung als Vakuum.



1.c) Betrachten Sie nun das Magnetfeld $\vec{B}$ innerhalb $a < r < b$. In diesem Bereich muss die Fouriertransformierte $\tilde{B}_\varphi(r, \theta, \omega)\, \hat{e}_\varphi$ die Gl. (3) erfüllen. Nutzen Sie das Ergebnis aus Teil b), um zu zeigen, dass nur für bestimmte Werte von ω Lösungen existieren. Sie können annehmen, dass sich $u(r)$ nur langsam ändert, so dass Terme der Form $\mathrm{d}^n u/\mathrm{d}r^n$ vernachlässigbar sind. Nutzen Sie den Erdradius $a \simeq 6400\,\mathrm{km}$ um die niedrigste Oszillationsfrequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ des Magnetfelds zwischen Erde und Ionosphäre zu bestimmen. Geben Sie Ihr Ergebnis in Hz an.

Aufgabe 2: Die Unschärferelation durch Fourier (7 P)

Eine Fouriertransformation kann als eine Art Verknüpfung verschiedener "physikalischer Domänen" gesehen werden, z.B. als Verbindung zwischen Ort und Wellenvektor (oder alternativ Impuls). In dieser Aufgabe werden Sie sehen, dass eine Unschärfe in einer Domäne durch die Fouriertransformation mit der Unschärfe in der anderen verbunden ist.

Die eindimensionale Fouriertransformation der Position x und die entsprechende inverse Transformation sind definiert als:

$$F[f(x)](k) \equiv \tilde{f}(k) = \int \mathrm{d}x f(x) e^{-ikx}, \quad F^{-1}[\tilde{f}(k)](x) \equiv f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k \tilde{f}(k) e^{ikx}. \tag{7}$$

2.a) Für $z \in \mathbb{R}$ berechnen Sie das Integral

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\frac{x^2}{2}} e^{zx}. \tag{8}$$

2.b) Nehmen Sie nun an, dass das vorherige Ergebnis ebenfalls für $z \in \mathbb{C}$ gilt und zeigen Sie, dass die Fouriertransformation der eindimensionalen Gaussverteilung wie folgt gegeben ist:

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right](k) = e^{-\frac{k^2}{2}}. \tag{9}$$

2.c) Betrachten Sie nun eine Gaussverteilung mit der Unsicherheit σ_x und leiten Sie deren Fouriertransformation her:

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\right](k) = e^{-\frac{k^2}{2\sigma_k^2}}, \tag{10}$$

Geben Sie hier σ_k als Funktion von σ_x an.

2.d) Berechnen Sie das Produkt $\sigma_x\sigma_k$. Wie hängt es von σ_x ab?

2.e) Nun wollen wir die Bedeutung von σ_k und σ_x verstehen. Ein Gauss'sches Wellenpaket, das um x_c zentriert ist, kann wie folgt beschrieben werden

$$f_{x_c}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma_x^2}}, \tag{11}$$

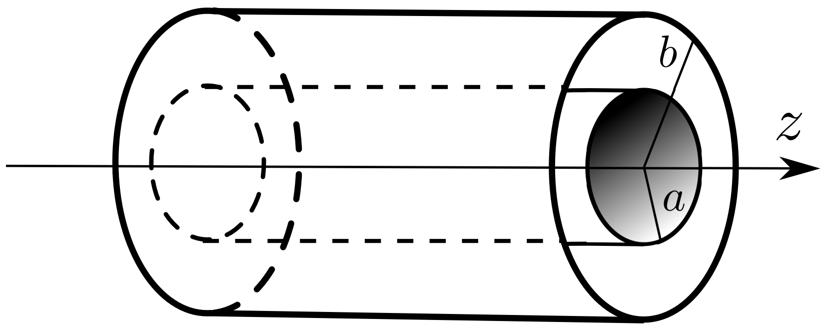
seine Fouriertransformation ist damit

$$\tilde{f}_{x_c}(k) = e^{-\frac{k^2}{2\sigma_k^2}} e^{-ikx_c}. \tag{12}$$

Setzen Sie $x_c = 2$, $\sigma_x = \frac{1}{\pi}$ und skizzieren Sie $\mathrm{Re}[\tilde{f}_{x_c}(k)]$ für $k \in [-2\pi, 2\pi]$.

Aufgabe 3: Elektromagnetische Wellen im koaxialen Kabel (5 P)

In dieser Aufgabe werden Sie elektromagnetische Wellen in einem Koaxialkabel (zylindrischer Wellenleiter) betrachten und den Energiefluss und die Energieerhaltung diskutieren.



Gegeben sei ein Koaxialkabel mit dem inneren Radius a und dem äußeren Radius b, wie in der Abbildung oben zu sehen. Sie können, wie üblich, das Kabel als unendlich lang nähern. Damit ergibt sich als mögliche Lösung der Wellengleichung zwischen den beiden Oberflächen

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = E_0 \frac{\cos(kz - \omega t)}{\rho} \hat{\mathrm{e}}_\rho, \tag{13}$$

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{E_0}{c} \frac{\cos(kz - \omega t)}{\rho} \hat{\mathrm{e}}_\varphi. \tag{14}$$

3.a) Bestimmen Sie die Ladung $\mathrm{d}q$ eines infinitesimalen Segments $\mathrm{d}z$ des inneren Zylinders, die Linienladungsdichte $\lambda(z,t) = \mathrm{d}q/\mathrm{d}z$ sowie den Strom $I(z,t)$ durch den inneren Zylinder.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Gauß und den Satz von Stokes.

3.b) Berechnen sie den Poynting-Vektor $\vec{S}(\rho, z, t)$, sowie die Energiedichte $u_{\mathrm{em}}(\rho, z, t)$.

3.c) Bestimmen Sie nun $\vec{S}(\rho, z, t)/u_{\mathrm{em}}(\rho, z, t)$. Diskutieren Sie die physikalische Interpretation des Ergebnisses.

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für $f = f(r, \theta, \varphi)$ und $\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi)\,\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + A_\theta(r, \theta, \varphi)\,\hat{\mathrm{e}}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi)\,\hat{\mathrm{e}}_\varphi$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\hat{\mathrm{e}}_\varphi \tag{15}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{16}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{17}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\hat{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\mathrm{e}}_\varphi \tag{18}$$