

# Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

## Übungsblatt 8

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 08.01.2024, Abgabe: 15.01.2024 10:00 Uhr, Tutorium: 17.01.2024

---

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

---

### Aufgabe 1: Sphärische elektromagnetische Wellen (8 P)

In dieser Aufgabe werden Sie sphärische Lösungen der Wellengleichung im Vakuum studieren. Die Ergebnisse werden verwendet, um Oszillationen von Feldern in der Erdatmosphäre zu beschreiben.

Betrachten Sie die Fouriertransformation von  $f$

$$\tilde{f}(\vec{r}, \omega) = \int dt f(\vec{r}, t) e^{-i\omega t}, \quad f(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \tilde{f}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Die Maxwell-Gleichungen im Fourierraum werden damit zu

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = -i\omega \tilde{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{B}} = i\frac{\omega}{c^2} \tilde{\vec{E}}, \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{B}}) = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\vec{B}} \quad (2)$$

- 1.a) Für ein magnetisches Feld der Form  $\vec{B} = f(\vec{r}, t) \hat{e}_\varphi$  in sphärischen Koordinaten gilt somit die folgende Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \tilde{f}(\vec{r}, \omega) \hat{e}_\varphi) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{f}(\vec{r}, \omega) \hat{e}_\varphi. \quad (3)$$

Betrachten Sie nun ein Problem mit azimuthaler Rotationssymmetrie, bei dem die Lösung nicht von  $\varphi$  abhängt. In diesem Fall kann die Lösung durch Separation der Variablen ausgedrückt werden:  $\tilde{f}(\vec{r}, \omega) = \frac{u(r)}{r} P(\cos \theta)$  (im Weiteren werden wir die Abhängigkeit von  $\omega$  nicht mehr ausschreiben). Zeigen Sie, dass die radiale und polare Komponente die folgende Gleichung erfüllen:

$$r^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \frac{r^2}{u(r)} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{1}{P(\cos \theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (P(\cos \theta) \sin(\theta)) \right) = 0 \quad (4)$$

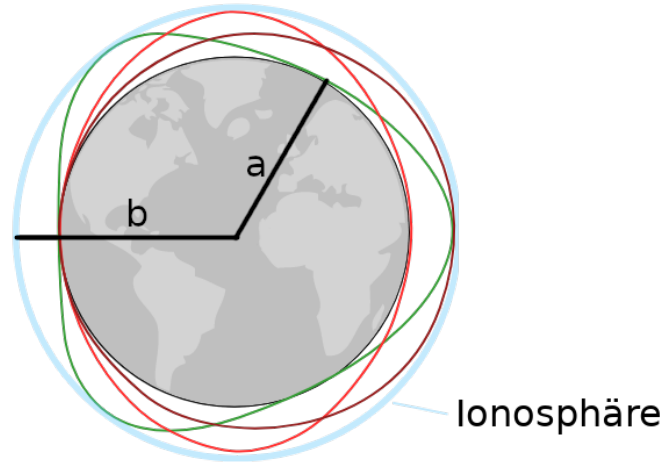
- 1.b) Zeigen Sie, dass  $P(\cos \theta)$  die Legende-Gleichung für die assoziierten Legendre Polynome mit  $m = 1$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP(\cos \theta)}{d\theta} \right) - \frac{P(\cos \theta)}{\sin^2 \theta} = -l(l+1)P(\cos \theta), \quad (5)$$

erfüllen muss. Zeigen Sie weiterhin, dass sich die Gleichung für die radiale Komponente somit vereinfacht zu:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u(r) = 0. \quad (6)$$

Die Erdoberfläche und die Ionosphäre können als zwei konzentrische Oberflächen beschrieben werden. Der Radius der Erde sei durch  $a$  gegeben und die Ionosphäre durch den Radius  $b$ , wobei  $b - a \ll a$  wie in der Abbildung unten zu sehen. Die zwei Regionen  $r \leq a$  und  $r \geq b$  können als Leiter beschrieben werden und die Region  $a < r < b$  in erster Näherung als Vakuum.



- 1.c) Betrachten Sie nun das Magnetfeld  $\vec{B}$  innerhalb  $a < r < b$ . In diesem Bereich muss die Fouriertransformierte  $\tilde{B}_\varphi(r, \theta, \omega) \hat{e}_\varphi$  die Gl. (3) erfüllen. Nutzen Sie das Ergebnis aus Teil b), um zu zeigen, dass nur für bestimmte Werte von  $\omega$  Lösungen existieren. Sie können annehmen, dass sich  $u(r)$  nur langsam ändert, so dass Terme der Form  $d^n u / dr^n$  vernachlässigbar sind. Nutzen Sie den Erdradius  $a \simeq 6400 \text{ km}$  um die niedrigste Oszillationsfrequenz  $\nu = \omega / (2\pi)$  des Magnetfelds zwischen Erde und Ionosphäre zu bestimmen. Geben Sie Ihr Ergebnis in Hz an.

## Lösung zu Aufgabe 1:

### Lösung 1.a)

(0 Punkte)

Im Folgenden wird die  $\sim$  weggelassen. Trotzdem meinen wir die Fouriertransformierte des B-Felds.

Wir berechnen die Rotation von  $B_\varphi(r, \theta) \hat{e}_\varphi$  in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} \times B_\varphi(r, \theta) \hat{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (B_\varphi(r, \theta) \sin \theta)}{\partial \theta} \hat{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\varphi(r, \theta))}{\partial r} \hat{e}_\theta . \quad (7)$$

Wir sehen, dass  $\vec{\nabla} \times (B_\varphi \hat{e}_\varphi)$  keine  $\hat{e}_\varphi$ -Komponente und keine Abhängigkeit von  $\varphi$  hat. Das führt dazu, dass die meisten Terme in dem Ausdruck der Rotation in Kugelkoordinaten wegfallen. Dadurch hat die zweifache Rotation  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (B_\varphi \hat{e}_\varphi))$  nur eine  $\hat{e}_\varphi$ -Komponente:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times B_\varphi(r, \theta) \hat{e}_\varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\partial (r B_\varphi(r, \theta))}{\partial r} \right) \hat{e}_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (B_\varphi(r, \theta) \sin \theta)}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\varphi . \quad (8)$$

Nun substituieren wir  $B_\varphi(r, \theta) = \frac{u(r)}{r} P(\cos \theta)$ :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times B_\varphi(r, \theta) \hat{e}_\varphi) = -\frac{P(\cos \theta)}{r} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} \hat{e}_\varphi - \frac{u(r)}{r^3} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d(P(\cos \theta) \sin \theta)}{d\theta} \right) \hat{e}_\varphi . \quad (9)$$

Der radiale Term ist einfach  $\frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2}$  (wir fügen den Faktor  $1/r$  hinzu, weil er den Ausdruck vereinfacht).

Setzen wir den vorherigen Ausdruck in  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}$  ein, erhalten wir:

$$0 = \frac{P(\cos \theta)}{r} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{u(r)}{r^3} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d(P(\cos \theta) \sin \theta)}{d\theta} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{u(r)}{r} P(\cos \theta) . \quad (10)$$

Durch die Multiplikation mit  $\frac{r^3}{u(r)P(\cos \theta)}$  bekommen wir das gewünschte Ergebnis.

### Lösung 1.b)

(2 Punkte)

Wie üblich bei der Methode der Separation der Variablen lässt sich schlussfolgern, dass beide Terme in der DGL (Gl. 4) proportional der Konstante  $\pm C^2$  sein müssen.

Für den winkelabhängigen Teil erhalten wir:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (P(\cos \theta) \sin(\theta)) \right) = -C^2 P(\cos \theta) . \quad (11)$$

Wir führen die Ableitungen durch und bekommen

$$\frac{d^2 P(\cos \theta)}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{dP(\cos \theta)}{d\theta} - \frac{P(\cos \theta)}{\sin^2 \theta} = -C^2 P(\cos \theta) . \quad (12)$$

Dies entspricht genau der in der Aufgabe gegebenen Legendre Gleichung

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP(\cos \theta)}{d\theta} \right) - \frac{P(\cos \theta)}{\sin^2 \theta} = -l(l+1) P(\cos \theta) . \quad (13)$$

Wir wissen, dass Lösungen für  $-C^2 = -l(l+1)$  (mit  $l \in \mathbb{N}$ ) existieren. Damit wird die DGL für den radialen Teil zu

$$r^2 \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 + \frac{r^2}{u(r)} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} - l(l+1) = 0 \quad (14)$$

Das ist die Gleichung, die wir wollten (bis auf einen  $1/r^2$  Faktor).

### Lösung 1.c)

(2 Punkte)

Nun wissen wir, dass für dieses physikalische Szenario  $B_\varphi$  die zuvor hergeleitete Lösung hat. Im Falle kleiner Variationen (also bei Betrachtung der niedrigsten Frequenzen) verschwindet der Term mit der zweiten Ableitung. Es gibt tatsächlich eine physikalische Begründung dafür. Das elektrische Feld ist für  $r > b$  oder  $r < a$  gleich null, daher ist nach den Randbedingungen die parallele Komponente des elektrischen Feldes  $E_\theta$  an der Grenze null. Wenn Sie dies explizit berechnen, ergibt sich, dass  $\frac{du}{dr}$  sowohl bei  $a$  als auch bei  $b$  gleich null ist. Das Bild ist also konsistent mit kleinen Variationen und im Wesentlichen einer konstanten Funktion  $u(r)$ .

Wenn wir die zweite Ableitung in (14) vernachlässigen und  $r \simeq a$  setzen, da  $b - a \ll a$ , erhalten wir

$$2\pi\nu_l = \omega_l \simeq \frac{c}{a} \sqrt{l(l+1)} \quad (15)$$

Das ist tatsächlich sehr nah an dem Ergebnis, das man ohne Approximation erhalten würde.

Das Einsetzen der numerischen Werte liefert folgendes Ergebnis:  $\nu_l \simeq 7.5\sqrt{l(l+1)}\text{Hz}$ , für  $l = 1$  das ist 10.5Hz.