Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 15.01.2024, Abgabe: 22.01.2024 10:00 Uhr, Tutorium: 24.01.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Fourier und Poisson (6 P)

In dieser Aufgabe werden Sie nützliche Eigenschaften der Fourier-Transformation beweisen und diese benutzen, um die Lösung der Poisson-Gleichung herzuleiten.

1.a) Betrachten Sie die Faltung zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

$$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' f(x-x')g(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x' f(x')g(x-x')\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation der Faltung dem Produkt der Fourier-Transformierten $\tilde{f}(k)$ und $\tilde{g}(k)$ entspricht:

$$F[(f*g)](k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)\,. \tag{2}$$

Dieses Ergebnis gilt in beliebigen Dimensionen. Es ist aber ausreichen, dies in 1D zu zeigen.

Hinweis: Es ist nicht erforderlich, herzuleiten, dass die Faltung ebenfalls eine Fourier-Transformation zulässt (wenn $f(x)$ und $g(x)$ eine Fourier-Transformation zulassen, gilt dies im Allgemeinen auch für ihre Faltung).

1.b) Zeigen Sie, dass die Rücktransformation von $1/k^2 = 1/|\vec{k}^2|$ in 3D durch

$$F^{-1}\left[\frac{1}{k^2}\right](r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi r}\,, \tag{3}$$

gegeben ist.
Erinnern Sie sich hierfür an die dreidimensionale Fourier-Transformation

$$F[f(\vec{r})](\vec{k}) \equiv \tilde{f}(\vec{k}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad F^{-1}[\tilde{f}(\vec{k})](\vec{r}) \equiv f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\vec{k}\tilde{f}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{4}$$

Hinweis: Sie können das Koordinatensystem für $\vec{k}$ so wählen, dass $\hat{e}_z$ in Richtung von $\vec{r}$ zeigt. Weiterhin gilt: $\int_0^\infty \mathrm{d}x \dfrac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

1.c) Betrachten Sie nun die Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$. Zeigen Sie, indem Sie die Ausdrücke vor- und rücktransformieren und die zuvor hergeleiteten Eigenschaften verwenden, dass die Lösung der Poisson-Gleichung gegeben ist durch:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|r-r'|}\,. \tag{5}$$

Aufgabe 2: Hohlraumresonator mit Verlusten (7 P)

Sie haben gelernt, dass elektromagnetische Felder in resonanten Hohlräumen spezifische Frequenzen haben. In der Probeklausur haben Sie außerdem gezeigt, dass die elektromagnetische Energie innerhalb eines perfekten Hohlraumresonators erhalten bleibt. In dieser Übung betrachten wir einen realistischen Hohlraumresonator, in dem die Wände keine perfekten Leiter sind und es zu Energieverlusten kommt. Sie werden zeigen, wie sich dadurch die Resonanzfrequenzen ändert.

Betrachten Sie einen Hohlraum mit Resonanzfrequenz ω_0, in dem bei $t = 0$ ein elektrisches Feld eingeschaltet wird. Das Feld oszilliert mit der Frequenz ω_0, aber aufgrund des Energieverlusts ist die Amplitude im Allgemeinen zeitabhängig, so dass $\vec{E}(t) = |\vec{E}(t)|e^{-i\omega_0 t}\hat{e}_k$, wobei die anfängliche Amplitude des elektrischen Feldes $|\vec{E}(t=0)| = E_0$ ist und $\hat{e}_k$ eine beliebige Richtung darstellt.

Für die zeitlich gemittelte Energiedichte gilt:

$$\langle w_{\text{em}}\rangle(t) = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}(t)|^2, \tag{6}$$

wobei der Ausdruck nun zeitabhängig ist, da die Amplitude des elektrischen Feldes zeitlich variiert. Der Verlust an elektromagnetischer Energie $\langle w_{\text{em}}\rangle$ pro Zeiteinheit hängt wie folgt von der Resonanzfrequenz und dem sogenannten Gütefaktor Q ab:

$$\frac{\mathrm{d}\langle w_{em}\rangle(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{Q}\langle w_{em}\rangle(t). \tag{7}$$

2.a) Bestimmen Sie $\langle w_{em}\rangle(t)$ und $\vec{E}(t)$.

2.b) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Amplitude des E-Feldes $E(t) = |\vec{E}(t)|e^{-i\omega_0 t}$:

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t E(t)e^{i\omega t}. \tag{8}$$

Berechnen Sie außerdem die Funktion $|\tilde{E}(\omega)|^2$.

Sie sollten zu diesem folgenden Ergebnis gekommen sein:

$$|\tilde{E}(\omega)|^2 = \frac{E_0^2}{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + (\omega-\omega_0)^2}. \tag{9}$$

Skizzieren Sie $|\tilde{E}(\omega)|^2$. Zur Vereinfachung können Sie $E_0 = \omega_0 = Q = 1$ wählen.

Hinweis: Ähnlich wie auf dem letzten Übungsblatt, ist die Form der Lösung des Integrals $\int e^{\alpha t}\mathrm{d}t$ dieselbe für reelle und komplexe Werte von α.

2.c) Bestimmen Sie die Frequenz $\omega_{\max}$, bei der die Amplitude maximal ist, sowie $\omega_\pm$, bei denen gilt $|\tilde{E}(\omega_\pm)|^2 = |\tilde{E}(\omega_{\max})|^2/2$. Zeichnen Sie $\omega_\pm$ in Ihre Skizze ein. Bestimmen Sie außerdem $\omega_{\max}/|\omega_+ - \omega_-|$.

Aufgabe 3: Plötzlicher Strom durch einen Draht (7 P)

Im Rahmen der Magnetostatik haben Sie verschiedene Szenarien mit stromdurchflossenen Drähten behandelt. Nun werden Sie sehen, was sich ändert, wenn der Strom zeitabhängig ist.

Betrachten Sie einen elektrisch neutralen Draht entlang der z-Achse. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird gleichzeitig im gesamten Draht ein Strom I_0 erzeugt, also $I(t) = I_0\theta(t)$. Wie gewöhnlich können Sie annehmen, dass der Draht unendlich lang ist, sodass $\jmath(\vec{r}, t) = I(t)\delta(x)\delta(y)\hat{e}_z$.

3.a) Berechnen Sie die retardierten Potenziale $\Phi(\rho, t)$ und $\vec{A}(\rho, t)$ im Abstand ρ vom Draht. Der Einfachheit halber, können sie $z = 0$ setzen.

Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^X \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log(\sqrt{x^2 + a^2} + x)\Big|_0^X$.

3.b) Nutzen Sie das vorherige Ergebnis, um das B- und E-Feld als Funktion vom Abstand ρ und der Zeit t zu bestimmen.

3.c) Welche Werte nehmen die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ für $t \to \infty$ an? Stimmt das Ergebnis mit dem überein, was Sie vom zeitunabhängigen Fall erwarten würden?

Vektoroperatoren in zylindrischen Koordinaten

Für $f = f(\rho, \varphi, z)$ und $\vec{A} = A_\rho(\rho, \varphi, z)\, \hat{\mathrm{e}}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\, \hat{\mathrm{e}}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z)\, \hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\, \hat{\mathrm{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\, \hat{\mathrm{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\, \hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \tag{10}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{11}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{12}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) \hat{\mathrm{e}}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \hat{\mathrm{e}}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right) \hat{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \tag{13}$$