Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 10

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

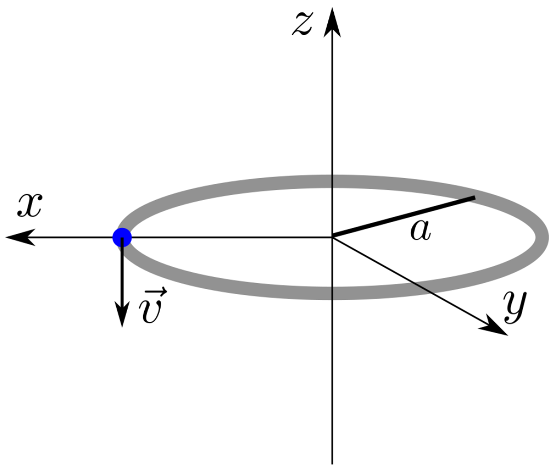
Ausgabe: 22.01.2024, Abgabe: 29.01.2024 10:00 Uhr, Tutorium: 31.01.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Rotierende Punktladung (8 P)

Mithilfe der Lienard-Wiechert Potenziale können allgemein die elektromagnetischen Felder von bewegten Ladungen berechnet werden. In dieser Aufgabe werden Sie diese Rechnung für ein Teilchen auf einer Kreisbahn durchführen.

Betrachten Sie ein Teilchen mit Ladung q und Masse m, das in der xy Ebene um den Ursprung rotiert. Nehmen Sie an, dass das Teilchen am Ort $(a, 0, 0)$ beginnt, dass die Kreisbahn einen festen Radius a hat und, dass die Winkelgeschwingkeit ω des Teilchens konstant ist.



1.a) Geben Sie den Ort $\vec{r}_q(t)$ des Teilchens in kartesischen Koordinaten an. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit $\vec{\beta}_q(t) = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ und Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}_q(t)$. Geben Sie diese ebenfalls in kartesischen Koordinaten an.

1.b) Nutzen Sie das vorherige Ergebnis und die Lienard-Wiechart Potenziale aus der Vorlesung, um die Potenziale $\vec{A}$ und ϕ entlang der z-Achse zu bestimmen: $\vec{A}(0, 0, z, t)$ und $\phi(0, 0, z, t)$. Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten:

$$\phi(0,0,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}, \quad \vec{A}(0,0,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\frac{\omega a}{c^2}\left(-\sin(\omega\tau)\,\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} + \cos(\omega\tau)\,\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}}\right) \quad (1)$$

1.c) Zeigen Sie nun mithilfe der Potenziale, dass $E_z(0, 0, 0, t) = 0$.

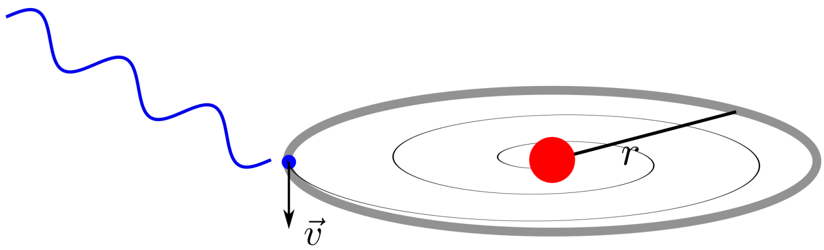
1.d) Nutzen Sie nun die allgemeinen Ausdrücke für die Felder aus der Vorlesung, um $\vec{E}(0,0,0,t)$ und $\vec{B}(0,0,0,t)$ zu bestimmen.

1.e) Überprüfen Sie, ob ihr Ergebnis für das magnetische Feld konsistent ist, mit dem Ergebnis, das Sie für eine Leiterschleife mit konstantem Strom $I = q/T$ bekommen würden, wobei T die Rotationsperiode des Teilchens ist.

Aufgabe 2: Bohr-Atom (5 P)

In der vorherigen Aufgabe haben Sie den Effekt einer rotierenden Ladung diskutiert. Allerdings haben Sie in der Vorlesung gesehen, dass eine beschleunigte Ladung Energie abstrahlt, also verliert. In dieser Aufgabe werden wir untersuchen, welche Auswirkungen dies auf das Bohrsche Atommodell hat.

Im Bohrschen Atommodell für Wasserstoff rotiert ein Elektron mit einer Masse von $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg und einer Ladung $q = -e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C um einen positiv geladenen Atomkern. Die Elektronenbahn ist kreisförmig und hat einen Radius von $r_H = 0{,}529\text{Å} = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m, wobei sich im Zentrum ein Kern mit der Ladung $q = e$ befindet. Außerdem gilt $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V\,m}}$. Wir werden nun sehen, dass in diesem einfachen Modell das Elektron durch die Abstrahlung Energie verlieren und in den Kern stürzen würde.



2.a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Elektrons $v(r)$ als Funktion der Entfernung zum Atomkern r, unter der Annahme, dass die Trajektorie bei jeder Rotation als Kreis mit dem Radius r beschrieben werden kann. Nutzen Sie den Ausdruck für die Geschwindigkeit, um die Gesamtenergie des Elektrons als Funktion des Orbitalradius $U_{\text{tot}}(r)$ zu bestimmen.

2.b) Ermitteln Sie die anfängliche Geschwindigkeit des Elektrons am Radius r_H und seine Geschwindigkeit, wenn es sich in einer Entfernung von $0,01$Å vom Kern befindet. Kann das Elektron als nicht-relativistisch betrachtet werden?

2.c) Verwenden Sie die Larmor-Formel, um den Energieverlust als Funktion des Orbitradius r herzuleiten.

2.d) Berechnen Sie mithilfe der vorherigen Ergebnisse die Zeit, die das Elektron benötigt, um in den Kern zu fallen (unter der Annahme, dass der Radius des Kerns vernachlässigbar ist und das Elektron während des gesamten Prozesses als nicht-relativistisch betrachtet werden kann).

Aufgabe 3: Bremsstrahlung (7 P)

Während der Vorlesung wurde der allgemeine Ausdruck für die Emission $\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ im Fall beliebiger Teilchengeschwindigkeiten und -beschleunigungen hergeleitet. In dieser Aufgabe werden Sie die Strahlenemission für konstante Beschleunigung untersuchen.

3.a) Leiten Sie den Ausdruck $\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}\Omega}(\theta,\varphi)$ für den Fall her, dass die Beschleunigung konstant ist und dass Beschleunigung und Geschwindigkeit des Teilchens kollinear sind, d.h. dass sie (bis auf ein mögliches Vorzeichen) in dieselbe Richtung zeigen. Sie können für die Einfachheit davon ausgehen, dass sich das Teilchen in z-Richtung bewegt und beschleunigt wird.

3.b) Bestimmen Sie den Wert der abgestrahlten Leistung in Vorwärtsrichtung $\theta = 0$. Bei welchem Winkel θ_M ist die Leistungsabstrahlung am höchsten? Drücken Sie die Antwort als Funktion von $\cos\theta_M$ aus.

3.c) Ermitteln Sie den Wert von $\cos\theta_M$ im Grenzfall nicht-relativistischer Teilchen ($\beta = \epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$) und ultra-relativistischer Teilchen ($\beta = 1-\epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$). In beiden Fällen sollten Sie das Ergebnis bis zur Ordnung ϵ^2 angeben. Wie hängt der Winkel von $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ im Grenzfall ultra-relativistischer Teilchen ab?

3.d) Bestimmen Sie die insgesamt abgestrahlte Leistung P' durch Integration über den Raumwinkel. Skizzieren Sie ihr Verhalten für $\beta \in [0,1]$. Gibt es einen Unterschied zwischen Beschleunigung ($\dot{\vec{\beta}}$ parallel zu $\vec{\beta}$) und Abbremsung ($\dot{\vec{\beta}}$ antiparallel zu $\vec{\beta}$)?

Hinweis: $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{1-x^2}{(1-\alpha x)^5} = \frac{4}{3(1-\alpha^2)^3}$