

Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Übungsblatt 10

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 22.01.2024, Abgabe: 29.01.2024 10:00 Uhr, Tutorium: 31.01.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 3: Bremsstrahlung

(7 P)

Während der Vorlesung wurde der allgemeine Ausdruck für die Emission $\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dP}{d\Omega}$ im Fall beliebiger Teilchengeschwindigkeiten und -beschleunigungen hergeleitet. In dieser Aufgabe werden Sie die Strahlenemission für konstante Beschleunigung untersuchen.

- 3.a) Leiten Sie den Ausdruck $\frac{dP'}{d\Omega}(\theta, \varphi)$ für den Fall her, dass die Beschleunigung konstant ist und dass Beschleunigung und Geschwindigkeit des Teilchens kollinear sind, d.h. dass sie (bis auf ein mögliches Vorzeichen) in dieselbe Richtung zeigen. Sie können für die Einfachheit davon ausgehen, dass sich das Teilchen in z -Richtung bewegt und beschleunigt wird.
- 3.b) Bestimmen Sie den Wert der abgestrahlten Leistung in Vorwärtsrichtung $\theta = 0$. Bei welchem Winkel θ_M ist die Leistungsabstrahlung am höchsten? Drücken Sie die Antwort als Funktion von $\cos \theta_M$ aus.
- 3.c) Ermitteln Sie den Wert von $\cos \theta_M$ im Grenzfall nicht-relativistischer Teilchen ($\beta = \epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$) und ultra-relativistischer Teilchen ($\beta = 1 - \epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$). In beiden Fällen sollten Sie das Ergebnis bis zur Ordnung ϵ^2 angeben. Wie hängt der Winkel von $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ im Grenzfall ultra-relativistischer Teilchen ab?
- 3.d) Bestimmen Sie die insgesamt abgestrahlte Leistung P' durch Integration über den Raumwinkel. Skizzieren Sie ihr Verhalten für $\beta \in [0, 1]$. Gibt es einen Unterschied zwischen Beschleunigung ($\dot{\vec{\beta}}$ parallel zu $\vec{\beta}$) und Abbremsung ($\dot{\vec{\beta}}$ antiparallel zu $\vec{\beta}$)?

Hinweis: $\int_{-1}^1 dx \frac{1-x^2}{(1-\alpha x)^5} = \frac{4}{3(1-\alpha^2)^3}$

Lösung zu Aufgabe 3:

Lösung 3.a)

(2 Punkte)

Wir beginnen mit der Formel für die winkelabhängige Strahlungsleistung aus der Vorlesung:

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{e}}_r \times [(\hat{\mathbf{e}}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta}_q \cdot \hat{\mathbf{e}}_r)^5} \quad (1)$$

Hier ist $\vec{\beta} = \beta \hat{e}_z$ und $\dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta} \hat{e}_z$. Auch gilt $\hat{e}_r \times \hat{e}_r \times \hat{e}_z = (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z) \hat{e}_r - (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_z = \cos \theta \hat{e}_r - \hat{e}_z$. Damit vereinfacht sich der Ausdruck in die gewünschte Form.

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{(\cos \theta \hat{e}_r - \hat{e}_z)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (2)$$

Lösung 3.b)

(2 Punkte)

Man sieht sofort, dass keine Strahlung in Vorwärtsrichtung abgestrahlt wird, da $\sin(\theta = 0) = 0$.

Um den Winkel der maximalen Abstrahlung zu finden führen wir die Ableitung des winkelabhängigen Teils nach θ durch:

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \frac{6\beta \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - 10\beta}{\text{Nenner}}. \quad (3)$$

Die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, von denen wir nur die für $\theta_M \in [0, \pi]$ betrachten:

$$\cos \theta_M = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta}. \quad (4)$$

Dieses Ergebnis scheint auf den ersten Blick widersprüchlich zu dem Vorherigen Ergebnis, dass keine Strahlung in die Vorwärtsrichtung emittiert wird. Tatsächlich ist für $\beta = 1$ der Winkel der maximalen Emission $\theta_M = 0$, jedoch lassen sich massive Teilchen nicht auf Lichtgeschwindigkeit, also $\beta = 1$ beschleunigen. Für Teilchen mit wachsenden Geschwindigkeiten verschiebt sich der Winkel mit maximaler Abstrahlung näher und näher zur Vorwärtsrichtung, aber erreicht diese niemals vollständig.

Lösung 3.c)

(1.5 Punkte)

Im Grenzfall nicht-relativistischer Teilchen haben wir

$$\cos \theta_M = \frac{\sqrt{1 + 15\epsilon^2} - 1}{3\epsilon} \simeq \frac{1 + \frac{15}{2}\epsilon^2 - 1}{3\epsilon} = \frac{5}{2}\epsilon. \quad (5)$$

Das zeigt, dass für $\epsilon \rightarrow 0$ die Richtung der Emission senkrecht zur Bewegung des Teilchens steht ($\cos \theta_M = 0$).

Im Grenzfall relativistischer Teilchen haben wir hingegen:

$$\cos \theta_M = \frac{\sqrt{1 + 15(1 - \epsilon)^2} - 1}{3(1 - \epsilon)} \simeq \left(-1 + 4 - \frac{15}{4}\epsilon\right) \frac{1}{3}(1 + \epsilon) \simeq 1 - \frac{\epsilon}{4}. \quad (6)$$

Nun wenden wir die Entwicklung des Cosinus für kleine Winkel an

$$\cos \theta_M \simeq 1 - \frac{\theta_M^2}{2} \simeq 1 - \frac{\epsilon}{4} \rightarrow \theta_M \simeq \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}. \quad (7)$$

Hier sehen wir direkt das Verhalten des Emissionswinkels, welcher sich immer näher an die Vorwärtsrichtung annähert, diese aber nicht erreicht.

Aus $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ erhalten wir $\gamma \simeq \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$, was bedeutet, dass $\theta_M \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\gamma}$. Der Winkel ist also invers-proportional zu γ .

Lösung 3.d)

(1.5 Punkte)

Aus der angegebenen Formel lässt sich das Ergebnis recht einfach bestimmen:

$$P' = \int_0^2 \pi d\phi \int_0^\pi \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{8\pi \epsilon_0 c} \int_{-1}^1 dx \frac{1 - x^2}{(1 - \alpha x)^5} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} \quad (8)$$

Die relevanten Information daraus sind:

- Die gesamte Leistungsabstrahlung ist symmetrisch unter der Richtungsänderung $\beta \rightarrow -\beta$ und $\dot{\beta} \rightarrow -\dot{\beta}$.
- Wenn die Ladung nicht beschleunigt ist ($\dot{\beta} = 0$), gibt es keine Strahlung bei großen Entfernungen.
- Es gibt ein Minimum für $\beta = 0$: Also ist die Abstrahlung (bei konstanter Beschleunigung) am geringsten wenn das Teilchen ruht.
- Die abgestrahlte Leistung divergiert für $\beta \rightarrow \pm 1$.