Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 11

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

Ausgabe: 29.01.2024, Abgabe: 05.02.2024, 10:00 Uhr, Tutorium: 07.02.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Zur gleichen Zeit, am gleichen Ort (6 P)

In dieser Aufgabe werden Sie sehen, dass "Gleichzeitigkeit" und "am gleichen Ort" vom Bezugssystems abhängen. Insbesondere werden Sie sehen, unter welchen Bedingungen zwei räumlich und zeitlich getrennte Ereignisse zusammenfallen können.

Betrachten Sie zwei Ereignisse x_1^μ und x_2^μ in einem Inertialsystem I, die in I durch $x_2^\mu - x_1^\mu = \Delta x^\mu = (c\Delta t, \Delta x, 0, 0)$ getrennt sind. Zur Vereinfachung sollten Sie $\Delta x > 0, \Delta t > 0$ annehmen.

1.a) Zeigen Sie, dass für $\Delta x^\mu \Delta x_\mu > 0$ ein Inertialsystem existiert, in dem beide Ereignisse am selben Ort stattfinden. Was ist die relative Geschwindigkeit dieses Inertialsystems zum Beobachtersystem I?

1.b) Zeigen Sie, dass für $\Delta x^\mu \Delta x_\mu < 0$ ein Inertialsystem existiert, in dem beide Ereignisse zur selben Zeit stattfinden. Bestimmen Sie die relative Geschwindigkeit dieses Inertialsystems zum Beobachtersystem I.

1.c) Kann die zeitliche Reihenfolge zweier Ereignisse im Fall $\Delta x^\mu \Delta x_\mu < 0$ umgekehrt werden? Begründen Sie Ihre Antwort auch im Hinblick auf die Kausalität.

1.d) Betrachten Sie ein 2D-Diagramm mit Δx und $\Delta(ct)$ auf den Achsen. Identifizieren Sie die Bereiche, die $\Delta x^\mu \Delta x_\mu > 0$ und $\Delta x^\mu \Delta x_\mu < 0$ entsprechen. Skizzieren Sie außerdem die Bahn einer elektromagnetischen Welle, die bei $\Delta t = 0$ in Richtung x ausgesandt wird.

Aufgabe 2: Lorentz-Boost Kompositionen (8 P)

Im Folgenden werden Sie Eigenschaften der Lorentz-Gruppe kennenlernen. Betrachten Sie einen Lorentz-Boost in Richtung x mit einer Geschwindigkeit $v\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$. Aus den Vorlesungen kann dieser wie folgt geschrieben werden:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\beta\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

2.a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Boosts in x-Richtung mit Geschwindigkeiten $v_1\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$ und $v_2\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$ ein Boost in dieselbe Richtung ergibt. Bestimmen Sie seine Geschwingkeit $v'\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$ als Funktion von $v_1\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$ und $v_2\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$. Ist die Reihenfolge, in der $\Lambda^\mu{}_\alpha(\beta_1\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x})$ und $\Lambda^\alpha{}_\nu(\beta_2\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x})$ multipliziert werden, wichtig?

2.b) Bestimmen Sie v_2 in Abhängigkeit von v_1 so, dass das Produkt beider Boosts die Einheitsmatrix ergibt.

2.c) Zeigen Sie durch explizite Matrixmultiplikation, dass die Metric $\eta_{\mu\nu}$ unter einer Boosttransformation mit Geschwingdigkeit $v\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$ invariant ist: $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$.

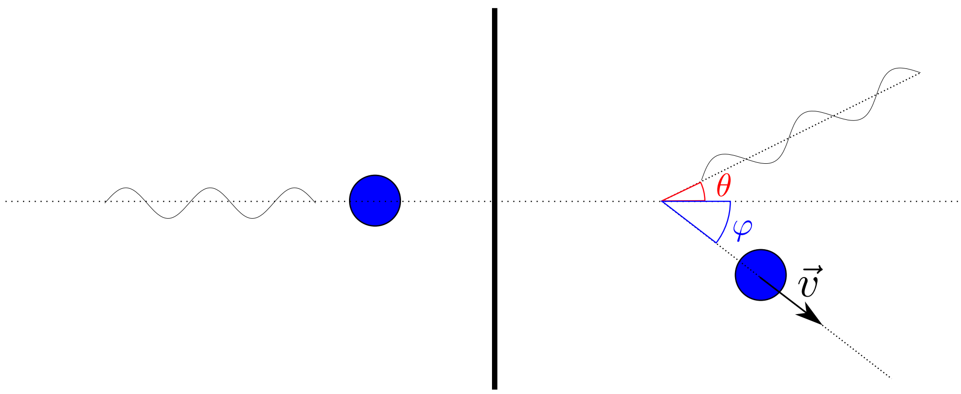
Betrachten Sie nun eine Boost-Transformation in eine beliebige Richtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_i\hat{e}_i$. Wir definieren außerdem $\beta_i \equiv \frac{v_i}{c}$, wobei wie üblich $\beta = \frac{|\vec{v}|}{c} = \sqrt{\sum \beta_i^2}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ gelten. Die verallgemeinerte Boost-Transformation ist:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\beta_i\hat{e}_i) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

2.d) Ergibt das Produkt von zwei Boost-Transformationen in unterschiedlichen Richtungen mit $v_1\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$ und $v_2\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{y}$ eine weitere Boost-Transformation? Wenn ja, bestimmen Sie die Geschwindigkeit der kombinierten Transformation. Ist die Reihenfolge, in der $\Lambda^\mu{}_\alpha(\beta_1\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{x})$ und $\Lambda^\alpha{}_\nu(\beta_2\,\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{y})$ multipliziert werden, wichtig?

Aufgabe 3: Relativistische Streuung (6 P)

Betrachten Sie ein Photon mit der Energie E, das an einem ruhenden Elektron mit der Masse m_e streut. Sie können annehmen, dass das Photon in Richtung x propagiert. Nachdem das Photon mit dem Elektron interagiert hat, wird das Photon um einen Winkel θ abgelenkt, und das Elektron hat eine Geschwindigkeit von v im Winkel φ zur x-Achse, wie in der Abbildung unten zu sehen.



3.a) Bestimmen Sie den Viererimpuls p^μ des Elektrons vor der Streuung und den Viererimpuls p'^μ nach der Streuung in Abhängigkeit von v und φ.
Bestimmen Sie den Viererimpuls k^μ und k'^μ des Photons vor und nach der Streuung als Funktionen der Energie vor und nach der Streuung, E und E', und dem Streuungswinkel θ.

3.b) Welchen Wert hat das Skalarprodukt $p'_\mu p'^\mu$?

3.c) Verwenden Sie das vorherige Ergebnis für $p'_\mu p'^\mu$ und die Viererimpulserhaltung, um die Energie E' des Photons nach der Streuung als Funktion von θ herzuleiten.