Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

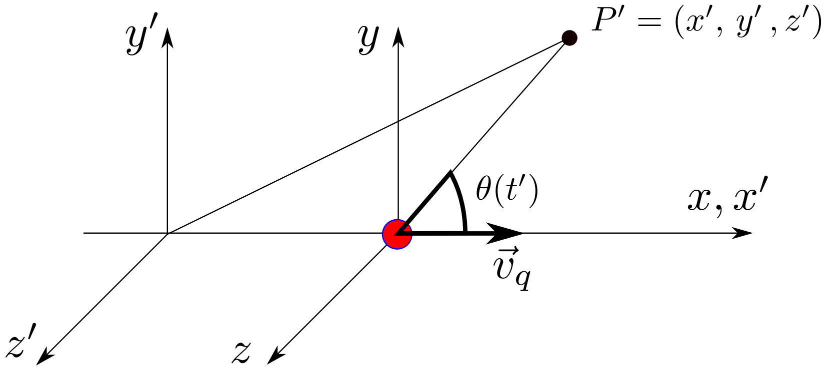
Ausgabe: 05.02.2024, Abgabe: 12.02.2024, 10:00 Uhr, Tutorium: 14.02.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Die Bewegte Ladung (revisited) (7 P)

In dieser Übung werden Sie sehen, wie die komplizierten elektrischen und magnetischen Felder einer bewegten Ladung, die Sie in der Vorlesung gesehen haben, durch Verwendung der Lorentztransformationen einfacher hergeleitet werden können.

Betrachten Sie ein Teilchen mit Ladung q in zwei Bezugssystemen. In dem Bezugssystem $\mathcal{I}$ ruht das Teilchen im Ursprung. Im Laborsystem $\mathcal{I}'$ bewegt sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_q = v\,\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}}$, wie in der Abbildung unten dargestellt. Hier ist $\theta(t')$ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor der Ladung und dem Punkt P' in $\mathcal{I}'$ an dem die Felder bestimmt werden sollen.



1.a) Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{E}'$ in $\mathcal{I}'$, indem Sie das Teilchen zuerst in seinem Ruhesystem $\mathcal{I}$ betrachten und dann ins Laborsystem $\mathcal{I}'$ transformieren. Drücken Sie das Ergebnis in den Koordinaten von $\mathcal{I}'$ aus.

1.b) Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{B}'$ in $\mathcal{I}'$, indem Sie das Teilchen in seinem Ruhesystem $\mathcal{I}$ betrachten und dann ins Laborsystem $\mathcal{I}'$ transformieren. Drücken Sie das Ergebnis in den Koordinaten von $\mathcal{I}'$ aus.

1.c) Überprüfen Sie, ob die Gleichung $\vec{B}' = -\frac{\vec{v}\times\vec{E}'}{c^2}$ gilt, wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Bezugssystems $\mathcal{I}'$ ist.

1.d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für $\vec{E}'$ mit dem bekannten Ergebnis aus der Vorlesung:

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\,' - \vec{r}\,'_q(t')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}\,'_q(t')|^3}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,. \tag{1}$$

Aufgabe 2: Der duale Feldstärketensor (6 P)

In dieser Übung werden Sie sich mit dem Konzept des dualen Feldstärketensors $\tilde{F}^{\mu\nu}$ vertraut machen und sehen, wie dies den üblichen Feldtensor $F^{\mu\nu}$ ergänzt.

Um $\tilde{F}^{\mu\nu}$ definieren zu können, brauchen wir das Levi-Civita Symbol in 4D $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \begin{cases} +1 & \mu\nu\alpha\beta \text{ gerade Permutation von } 0123 \\ -1 & \mu\nu\alpha\beta \text{ ungerade Permutation von } 0123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

Der duale Feldstärketensor ist definiert als $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$.

2.a) Bestimmen Sie die Komponenten des kovarianten Tensors $F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$ und überprüfen Sie, dass diese den Komponenten von $F^{\mu\nu}$ entsprechen, mit der Substitution $E_i \to -E_i$.

2.b) Zeigen Sie, dass der duale Tensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ äquivalent zum Tensor $F^{\mu\nu}$ ist, wenn man die folgenden Substitutionen durchführt: $E_i/c \to B_i$ und $B_i \to -E_i/c$.

2.c) Leiten Sie die elektromagnetische Gleichungen her, die aus $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ folgen.

2.d) Die Größen $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ and $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ sind sogenannte Lorentzinvarianten, d.h. sie bleiben unter Lorentztransformationen unverändert. Bestimmen Sie $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ and $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ als Funktionen von den Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

2.e) In der vorherigen Aufgabe haben Sie gesehen, dass rein elektrostatische Felder ($\vec{E} \neq 0$ und $\vec{B} = 0$) in ein anderes Bezugssystem geboostet werden können, in dem $\vec{E} \neq 0$ und $\vec{B} \neq 0$ gilt. Ist es auch möglich, dass $\vec{E} \neq 0$ und $\vec{B} = 0$ in einem Bezugssystem gilt, während diese Felder zu $\vec{E} = 0$ und $\vec{B} \neq 0$ in einem anderen Bezugssystem transformieren?
Hinweis: Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus der vorherigen Teilaufgabe.

Aufgabe 3: Der Energie-Impuls Tensor (7 P)

In dieser Aufgabe lernen Sie den Energie-Impuls Tensor $T^{\mu\nu}$ kennen und seine Rolle in der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik.

Der Energie-Impuls Tensor ist wie folgt definiert:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}\right), \tag{3}$$

wobei $\eta^{\mu\nu}$ die Minkowski-Metrik ist und $F^{\mu\nu}$ der Feldstärketensor.

3.a) Ist der Tensor $T^{\mu\nu}$ symmetrisch, anti-symmetrisch oder ohne Symmetrie? Geben Sie Ihre Antwort ohne explizite Berechnung der Komponenten.

3.b) Leiten Sie nun die Komponenten von $T^{\mu\nu}$ her, d.h. drücken Sie T^{00}, T^{0i} und T^{ij} durch die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

3.c) Berechnen Sie die Spur $T^{\mu}_{\ \mu} \equiv \eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$.

3.d) Betrachten Sie die 4-Kraft $f^\mu = F^{\mu\nu}j_\nu$, wobei j_ν der 4-Strom aus der Vorlesung ist. Zu welcher Gleichung aus der Elektrodynamik ist $\partial_\mu T^{\mu 0} = -f^0$ äquivalent?