

Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Übungsblatt 12

Prof. Dr. Felix Kahlhöfer – Wintersemester 2023/2024

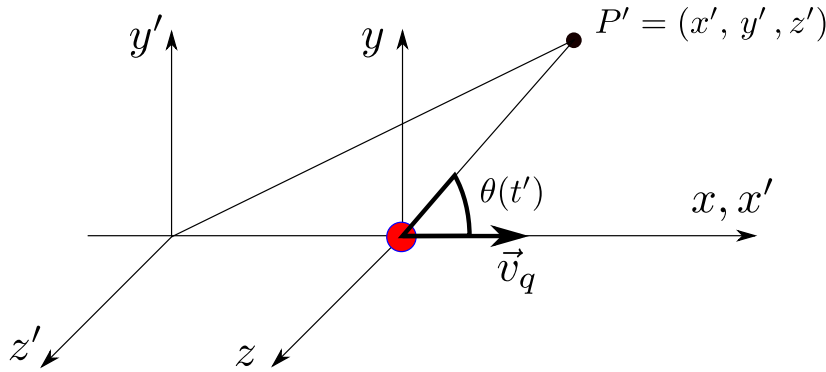
Ausgabe: 05.02.2024, Abgabe: 12.02.2024, 10:00 Uhr, Tutorium: 14.02.2024

Bitte schreiben Sie Ihren **Namen**, **Übungsgruppe** und **Matrikelnummer** auf die Lösung.

Aufgabe 1: Die Bewegte Ladung (revisited) (7 P)

In dieser Übung werden Sie sehen, wie die komplizierten elektrischen und magnetischen Felder einer bewegten Ladung, die Sie in der Vorlesung gesehen haben, durch Verwendung der Lorentztransformationen einfacher hergeleitet werden können.

Betrachten Sie ein Teilchen mit Ladung q in zwei Bezugssystemen. In dem Bezugssystem $\mathcal{I}$ ruht das Teilchen im Ursprung. Im Laborsystem $\mathcal{I}'$ bewegt sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_q = v \hat{e}_x$, wie in der Abbildung unten dargestellt. Hier ist $\theta(t')$ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor der Ladung und dem Punkt P' in $\mathcal{I}'$ an dem die Felder bestimmt werden sollen.



- Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{E}'$ in $\mathcal{I}'$, indem Sie das Teilchen zuerst in seinem Ruhesystem $\mathcal{I}$ betrachten und dann ins Laborsystem $\mathcal{I}'$ transformieren. Drücken Sie das Ergebnis in den Koordinaten von $\mathcal{I}'$ aus.
- Bestimmen Sie die Komponenten von $\vec{B}'$ in $\mathcal{I}'$, indem Sie das Teilchen in seinem Ruhesystem $\mathcal{I}$ betrachten und dann ins Laborsystem $\mathcal{I}'$ transformieren. Drücken Sie das Ergebnis in den Koordinaten von $\mathcal{I}'$ aus.
- Überprüfen Sie, ob die Gleichung $\vec{B}' = -\frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2}$ gilt, wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Bezugssystems $\mathcal{I}'$ ist.
- Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für $\vec{E}'$ mit dem bekannten Ergebnis aus der Vorlesung:

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')}{|\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')|^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (1)$$

Lösung zu Aufgabe 1:

Lösung 1.a)

(2 Punkte)

Im System $\mathcal{I}'$ hat das Teilchen die Geschwindigkeit $v \hat{e}_x$. Daher bewegt sich das Intertialsystem $\mathcal{I}'$ mit der Geschwindigkeit $-v \hat{e}_x$ relativ zum System $\mathcal{I}$. In $\mathcal{I}$ gilt $\vec{B} = 0$, und das E-Feld ist das einer ruhenden Punktladung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z). \quad (2)$$

Wir wissen aus den während der Vorlesung hergeleiteten Transformationsregeln, dass $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma E_y$ und $E'_z = \gamma E_z$ gelten. Dennoch sind wir noch nicht fertig, da wir nun Ausdrücke für die Felder in Bezug auf die Koordinaten im Ruhesystem haben. Wir müssen zusätzlich die Koordinatentransformation betrachten:

$$x = \gamma(x' - vt') \quad (3)$$

$$y = y' \quad (4)$$

$$z = z' \quad (5)$$

Nun können wir alles in Bezug auf die gestrichenen Koordinaten umschreiben. Dabei erhalten die x -Komponente einen γ -Faktor aus der Koordinatentransformation und die senkrechten Komponenten des elektrischen Feldes denselben Faktor aus der Feldtransformation:

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma q}{(\gamma^2(x' - vt')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} ((x' - vt') \hat{e}_x + y' \hat{e}_y + z' \hat{e}_z). \quad (6)$$

Beachten Sie, dass $(x' - vt') \hat{e}_x + y' \hat{e}_y + z' \hat{e}_z$ genau das ist, was während der Vorlesung als $\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')$ bezeichnet wurde. Dies wird später nützlich sein, wenn wir die Ergebnisse mit den Ausdrücken aus Vorlesung 19 vergleichen möchten.

Lösung 1.b)

(2 Punkte)

Wir beginnen erneut mit dem Ausdruck für die Felder im Ruhesystem der Ladung. Da insbesondere $\vec{B} = 0$ ist, haben wir $B'_x = B_x = 0$, während für die senkrechten (y,z) Komponenten gilt:

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}) = \gamma \frac{v \hat{e}_x \times \vec{E}}{c^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\gamma q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (vy \hat{e}_z - vz \hat{e}_y) \quad (7)$$

Auch dieses Ergebnis ist korrekt, aber die Koordinaten sind nicht diejenigen, die wir wollen. Sobald wir transformieren, erhalten wir:

$$\vec{B}'_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\gamma q}{(\gamma^2(x' - vt')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} (vy' \hat{e}_z - vz' \hat{e}_y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma q v}{(\gamma^2(x' - vt')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} (y' \hat{e}_z - z' \hat{e}_y) \quad (8)$$

In Zylinderkoordinaten mit der z -Achse als Symmetrieachse gilt $\hat{e}_{\varphi} = \frac{x \hat{e}_y - y \hat{e}_x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Wählt man stattdessen die x' -Achse als Symmetrieachse, dann gilt $\hat{e}_{\varphi} = \frac{y' \hat{e}_z - z' \hat{e}_y}{\sqrt{z'^2 + y'^2}}$ und es ergibt sich

$$\vec{B}'_{\perp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma q v}{(\gamma^2(x' - vt')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \sqrt{z'^2 + y'^2} \hat{e}_{\varphi} \quad (9)$$

Lösung 1.c)**(1 Punkte)**

Durch direkte Berechnung erhalten wir:

$$-\frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\gamma q v}{(\gamma^2(x' - vt')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} (\hat{e}_x \times (y' \hat{e}_y - z' \hat{e}_z)) = \quad (10)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma q v}{(\gamma^2(x' - vt')^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} (y' \hat{e}_z - z' \hat{e}_y) \quad (11)$$

was genau das zuvor hergeleitete Ergebnis ist.

Beachten Sie, dass diese Berechnung sich von der vorherigen unterscheidet, da sie sich mit dem elektrischen Feld im primären Bezugssystem befasst und daher ein Faktor γ im Feld erscheint, anstatt in der Transformation. Außerdem ist der Ausdruck "allgemeiner", da er die senkrechten und parallelen Komponenten gleichzeitig behandelt.

Lösung 1.d)**(2 Punkte)**

Um unsere Ergebnisse mit den während der Vorlesung hergeleiteten Ausdrücken vergleichen zu können, ist es nützlich, zunächst einige Größen in $\mathcal{I}'$ herzuleiten:

$$\begin{cases} \vec{r}' &= x' \hat{e}_x + y' \hat{e}_y + z' \hat{e}_z \\ \vec{r}'_q(t') &= vt' \hat{e}_x \\ \vec{r}' - \vec{r}'_q(t') &= (x' - vt') \hat{e}_x + y' \hat{e}_y + z' \hat{e}_z \end{cases} \quad (12)$$

Die Formel aus der Vorlesung lautet:

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta(t'))^{3/2}} \frac{\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')}{|\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')|^{3/2}} \quad (13)$$

Nun, wie von der Abbildung vorgeschlagen, führen wir den Winkel θ als den Winkel zwischen Geschwindigkeit und $\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')$ ein, wie auch während der Vorlesung eingeführt. Wir haben dann (lassen Sie uns zur Vereinfachung $R = |\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')|$ einführen):

$$\begin{cases} (\vec{r}' - \vec{r}'_q(t'))_x &= R \cos \theta(t') \\ (\vec{r}' - \vec{r}'_q(t'))_\rho = \sqrt{y'^2 + z'^2} &= R \sin \theta(t') \end{cases} \quad (14)$$

Unter Verwendung der Gleichung 6 und der vorherigen Substitutionen erhalten wir (die t' -Abhängigkeit in θ wird weggelassen, um das Lesen zu erleichtern):

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{(\gamma^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} (\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{(\gamma^2 + (1 - \gamma^2) \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\vec{r}' - \vec{r}'_q(t')}{R^3}. \quad (15)$$

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass der Bruch mit allen Gamma-Faktoren derselbe ist, der in Gleichung 13 erscheint. Es gilt $1 - \gamma^2 = -\beta^2 \gamma^2$, und somit

$$\frac{\gamma}{(\gamma^2 + (1 - \gamma^2) \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{\gamma}{(\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (16)$$

also genau dasselbe wie in Gleichung 13.