Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 0

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353
Abgabe: ***keine***
Besprechung: ***Mittwoch****, 23.10.2024 in den Tutorien*

1. Einstein'sche Summenkonvention

Die Einstein'sche Summenkonvention ist eine nützliche Kurzschreibweise von Summen, in der Summen über doppelt auftretende Indizes nicht explizit mit Summen-Symbolen aufgeführt werden. Somit wird zum Beispiel $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=x,y,z} a_i b_i$ zu $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i$.
Weiterhin sehr nützlich ist der Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} mit der Eigenschaft $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ für alle geraden Permutationen von 123, $\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$ für alle ungeraden Permutationen und $\epsilon_{ijk} = 0$ für doppelt auftretende Indices. Damit lässt sich beispielsweise die i-te Komponente eines Kreuzprodukts schreiben als $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$.

a) Zeigen Sie, dass $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$.

b) Beweisen Sie die Graßmann'sche Identität

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{1}$$

2. Nabla-Kalkül

Der Nabla-Operator ist $\nabla = \hat{e}_x\partial_x + \hat{e}_y\partial_y + \hat{e}_z\partial_z$ mit den kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten, wobei $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$(i) \quad \nabla r = \mathbf{r}/r \equiv \hat{e}_r \tag{2}$$

$$(ii) \quad \nabla\cdot\mathbf{r} = 3 \tag{3}$$

$$(iii) \quad \nabla\times\mathbf{r} = 0 \tag{4}$$

$$(iv) \quad \nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} = -3\frac{\mathbf{r}-\mathbf{a}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^5}, \text{wobei } \mathbf{a} \text{ ein konstanter Vektor ist} \tag{5}$$

$$(v) \quad \nabla\cdot(\nabla\phi(r)) = \phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r) \tag{6}$$

3. Gradient, Divergenz, Rotation

a) Sei $\phi(\mathbf{r}) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ ein skalares Feld. Skizzieren Sie $\phi(\mathbf{r})$ mit Höhenlinien. Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla\phi$ und fügen Sie das Gradientenfeld Ihrer Skizze hinzu. Bestimmen Sie die Divergenz $\nabla\cdot\mathbf{A}$ und die Rotation $\nabla\times\mathbf{A}$ des Vektorfeldes $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

b) Sei $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x^2+y^2)^{n/2}(x\,\hat{e}_y - y\,\hat{e}_x)$ mit $n\in\mathbb{Z}$. Skizzieren Sie $\mathbf{A}$. Bestimmen Sie die Divergenz und Rotation von $\mathbf{A}$.

4. Kurvenintegrale

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{A} = 2x\hat{e}_x + 2y\hat{e}_y$ und die drei Punkte in der $x-y$ Ebene $A = (1,1,0)$, $B = (1,2,0)$ and $C = (2,2,0)$.

a) Berechnen Sie die das Kurvenintegral entlang des Weges $A \to B \to C$:

$$\int_{A\to B} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} + \int_{B\to C} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

b) Berechnen Sie nun das Integral entlang des direkten Weges von $A \to C$:

$$\int_{A\to C} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

c) Nutzen Sie nun die Ergebnisse um das geschlossene Integral

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

entlang des Pfads $A \to B \to C \to A$ zu berechnen.

d) Nun sei ein anderes Vektorfeld $\mathbf{B} = (2x+y)\hat{e}_x + (2y-x)\hat{e}_y$ gegeben. Erwarten Sie, dass Sie das selbe Ergebnis für

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$$

wie in der vorherigen Aufgabe erhalten? Berechnen Sie

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}.$$