Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 1

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353
Abgabe: ***Montag***, *28.10.2024 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: ***Mittwoch***, *30.10.2024 in den Tutorien*

1. Zweite Ableitungen

7 + 7 + 7 = 21 Punkte
Die Einstein'sche Summenkonvention ist eine nützliche Kurzschreibweise von Summen, in der Summen über doppelt auftretende Indizes nicht explizit mit Summen-Symbolen aufgeführt werden. Somit wird zum Beispiel $\nabla = \sum_{i=x,y,z} \hat{e}_i \partial_i$ zu $\nabla = \hat{e}_i \partial_i$. Nutzen Sie diese Schreibweise zusammen mit dem Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} um die folgenden Identitäten für beliebige, zweifach differenzierbare skalare Felder ϕ und Vektorfelder $\mathbf{A}$ zu zeigen:

a) Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei: $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$.

b) Ein Wirbelfeld ist quellenfrei: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

c) Mit $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ ergibt sich für die i-te Komponente der Rotation der Rotation: $[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \partial_i(\partial_j A_j) - \partial_j^2 A_i$.

2. Gradient, Divergenz und Rotation in Zylinderkoordinaten

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 11 + 10 = 51 Punkte
In den folgenden Aufgabenteilen berechnen Sie den Gradienten eines skalaren Feldes ϕ, sowie die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{A}$ in den Zylinderkoordinaten ρ, φ, z. Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten x, y, z ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \tag{1}$$

mit $\rho > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

a) Im Folgenden sollen die Einheitsvektoren $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_z$ in Abhängigkeit der kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ dargestellt werden. Berechnen Sie hierfür zunächst $\mathbf{v}_i = \partial_i \mathbf{r}$ mit $\mathbf{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ für $i \in \{\rho, \varphi, z\}$. Sie erhalten den jeweiligen Einheitsvektor dann anschließend als $\hat{e}_i = \mathbf{v}_i / |\mathbf{v}_i|$.

b) Drücken Sie nun die kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ im Zylinderkoordinaten-System aus, also als Linearkombination von $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_z$ deren Koeffizienten im Allgemeinen Funktionen von ρ, φ, z sind.

c) Leiten Sie her, dass

$$\begin{aligned}\partial_x \phi &= \left(\cos\varphi\,\partial_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho}\partial_\varphi\right)\phi \\ \partial_y \phi &= \left(\sin\varphi\,\partial_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\partial_\varphi\right)\phi \;.\end{aligned} \tag{2}$$

Berechnen Sie dafür erst $\partial_i \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial i}$ für $i \in \{\rho, \varphi\}$ und lösen Sie das Gleichungssystem nach $\partial_x\phi$ und $\partial_y\phi$ auf.

d) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus **b)** und **c)**, dass der Gradient $\nabla\phi = (\hat{e}_x\partial_x + \hat{e}_y\partial_y + \hat{e}_z\partial_z)\,\phi$ in Zylinderkoordinaten geschrieben werden kann als

$$\nabla\phi = \left(\hat{e}_\rho\partial_\rho + \frac{\hat{e}_\varphi}{\rho}\partial_\varphi + \hat{e}_z\partial_z\right)\phi \;. \tag{3}$$

Ersetzen Sie dafür die kartesischen Einheitsvektoren und Ableitungen durch die in Zylinderkoordinaten. Beachten Sie beim Vereinfachen, dass die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten ortsabhängig sind.

e) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus **b)** und **c)**, dass die Divergenz $\nabla\cdot\mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$ in Zylinderkoordinaten geschrieben werden kann als

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi A_\varphi + \partial_z A_z \;, \tag{4}$$

wobei $A_\alpha = \hat{e}_\alpha \cdot \mathbf{A}$.

f) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus **b)** und **c)**, dass die z-Komponente der Rotation $(\nabla\times\mathbf{A})_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ in Zylinderkoordinaten geschrieben werden kann als

$$(\nabla\times\mathbf{A})_z = \frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho\left(\rho A_\varphi\right) - \partial_\varphi A_\rho\right] \;, \tag{5}$$

wobei $A_\alpha = \hat{e}_\alpha \cdot \mathbf{A}$.

g) Sei $\phi(\mathbf{r}) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$. Wie lautet $\phi(\mathbf{r})$ in Zylinderkoordinaten? Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla\phi$ mit Gleichung (3) für $\rho > 0$. Bestimmen Sie die Divergenz und die z-Komponente der Rotation des Vektorfeldes $\nabla\phi$ mit den Gleichungen (4) und (5).

h) Sei $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x^2+y^2)^{n/2}(x\,\hat{e}_y - y\,\hat{e}_x)$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Wie lautet $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ in Zylinderkoordinaten? Bestimmen Sie die Divergenz und die z-Komponente der Rotation mit den Gleichungen (4) und (5) für $\rho > 0$.

3. Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale

4 + 10 + 4 + 10 = 28 Punkte
Sei $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \rho^n(\cos\alpha\,\hat{e}_\rho + \sin\alpha\,\hat{e}_\varphi)$ ein Vektorfeld in Zylinderkoordinaten. Der Parameter $\alpha \in [0, 2\pi)$ interpoliert zwischen einem Radialfeld ($\hat{e}_\rho$) und einem Wirbelfeld ($\hat{e}_\varphi$). Vernachlässigen Sie in dieser Aufgabe die z-Dimension und betrachten Sie das Problem als effektiv zweidimensional. Betrachten Sie eine Kreisfläche F mit Radius $\rho = R$ zentriert im Ursprung des Koordinatensystems.

a) Bestimmen Sie das geschlossene Kurvenintegral $\oint_{\partial F}\mathbf{A}\cdot\mathbf{dr}$. Die Kurve $\mathbf{dr}$ läuft in mathematisch positiver Richtung, d.h. $\mathbf{dr} = \hat{e}_\varphi R\,d\varphi$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

b) Bestimmen Sie das Flächenintegral $\int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{df}$. Das Flächenelement ist durch den in mathematisch positive Richtung laufenden Weg gegeben durch $\mathbf{df} = \hat{e}_z \rho \, d\rho d\varphi$ und $\rho \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Für die Rotation in Zylinderkoordinaten können Sie Gleichung (5) verwenden. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabenteil **a)**.

c) Bestimmen Sie nun das Oberflächenintegral $\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}$ wobei $\mathbf{dS}$ die eindimensionale Oberfläche des Kreises beschreibt. Die Oberfläche ist nach außen orientiert, d.h. $\mathbf{dS} = \hat{e}_\rho R \, d\varphi$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

d) Bestimmen Sie das Volumenintegral $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV$ mit $dV = \rho \, d\rho d\varphi$ und $\rho \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Für die Divergenz in Zylinderkoordinaten können Sie Gleichung (4) verwenden. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabenteil **c)**.