Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 2

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353
Abgabe: ***Montag***, *04.11.2024 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: ***Mittwoch***, *06.11.2024 in den Tutorien*

Hinweis: Bitte benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_02_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist. So können wir die Abgaben einfacher zuordnen.

1. Die Delta-Funktion

8 + 22 + 8 + 8 + 13 = 59 Punkte

In der Elektrodynamik wird zur Beschreibung von Punktladungen die sogenannte δ-Funktion (Distribution) benutzt. Sie ist nur im Zusammenhang mit einer Integration definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

wobei $f(x)$ eine stetige Funktion ist. Für $f(x) = 1$ erhält man die Normierung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) = 1. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (1), dass (i) $\delta(-x) = \delta(x)$, (ii) $x\delta(x) = 0$ und (iii) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

b) Man kann die δ-Funktion durch Folgen glatter Funktionen approximieren. Ein Beispiel ist

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(x) \quad \text{mit} \quad \delta_n(x) = n e^{-\pi n^2 x^2}. \tag{3}$$

Skizzieren Sie die Funktion δ_n für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x)$. Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x - x_0) f(x) dx$ für eine beliebige analytische Funktion f im Grenzfall $n \gg 1$ inklusive Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$. Entwicklen Sie hierfür zunächst f in eine Taylor Reihe um x_0 und führen Sie die Substitution $y = n(x - x_0)$ der Integrationsvariable durch. Warum können Sie die Taylor Reihe im Grenzfall $n \gg 1$ auf wenige Glieder beschränken? Was erhalten Sie im Grenzfall $n \to \infty$.

c) Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + (nx)^2} \tag{4}$$

Skizzieren Sie die Funktion δ_n für ein festes $n \in \mathbb{N}$ und berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x)$. Wieso können Sie im Weiteren nicht so verfahren wie im Aufgabenteil **b)** und die Korrekturen $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ berechnen?

d) Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \ , \tag{5}$$

wobei $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Gehen Sie dazu wie folgt vor: (i) Zeigen Sie erst, dass der Ausdruck auf der rechten Seite für alle $r \neq 0$ verschwindet. (ii) Zeigen Sie anschließend mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass das Integral über eine Kugel im Ursprung mit Radius R nicht verschwindet. (iii) Argumentieren Sie dann, dass dies eine Delta-Funktion bei $r = 0$ mit entsprechendem Vorfaktor bedeutet.

e) Wir lösen nun den vermeindlichen Widerspruch von Blatt 1, Aufgabe 2h: Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt

$$\nabla \times \left(\frac{\hat{e}_z \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\right) = 2\pi\delta(x)\delta(y)\hat{e}_z \ . \tag{6}$$

Hier ist $\boldsymbol{\rho} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$. Welchem n von Blatt 1, Aufgabe 2h entspricht das Vektorfeld? Gehen Sie wie in Aufgabenteil **d)** vor: (i) Zeigen Sie, dass alle Vektorkomponenten der linken Seite der Gleichung für alle $\rho \neq 0$ verschwinden. (ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes, dass das Integral über eine Kreisscheibe im Ursprung mit Radius R nicht verschwindet. (iii) Folgern Sie die Position der Delta-Peaks und den Vorfaktor.

2. Die Green'schen Sätze

5 + 6 = 11 Punkte

Seien $\phi(\boldsymbol{r})$ und $\psi(\boldsymbol{r})$ skalare Felder und $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \psi\nabla\phi$ ein Vektorfeld. In dieser Aufgabe leiten Sie Gleichungen (7) und (8) her, die als 1. und 2. Green'scher Satz bekannt sind.

a) Integrieren Sie die Divergenz $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ über ein Volumen V und nutzen Sie den Gauß'schen Satz um zu zeigen, dass

$$\int_V dV \left[(\nabla\psi)(\nabla\phi) + \psi\nabla^2\phi\right] = \oint_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \psi\nabla\phi \ . \tag{7}$$

b) Verfahren Sie analog mit dem Vektorfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \phi\nabla\psi$ und zeigen, dass

$$\int_V dV \left[\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right] = \oint_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \left[\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi\right] \ . \tag{8}$$

3. Das elektrische Feld eines Dipols

2 + 11 + 7 + 10 = 30 Punkte

Eine Punktladung q_i am Ort $\boldsymbol{r}_i$ erzeugt das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \ . \tag{9}$$

Ein *Dipol* besteht aus zwei Punktladungen mit Ladungen $q > 0$ bzw. $-q$ im Abstand $\boldsymbol{a}$. Betrachten Sie den elektrischen Dipol mit der Ladung $-q$ am Ort $-\frac{\boldsymbol{a}}{2}$ und der Ladung $+q$ am Ort $+\frac{\boldsymbol{a}}{2}$.

a) Wie lautet das elektrische Feld des Dipols laut Superpositionsprinzip?

Folgend leiten Sie die Fernfeldnäherung für das Dipolfeld her. Nehmen Sie dazu an, dass der Ladungsabstand $|\boldsymbol{a}|$ sehr viel kleiner als der Abstand zwischen Dipol und Messpunkt $\boldsymbol{r}$ sei, d.h. $|\boldsymbol{a}| \ll |\boldsymbol{r}|$.

b) Betrachten Sie den Nenner $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\pm|^3}$ mit $r_\pm = \pm\frac{\boldsymbol{a}}{2}$ und entwickeln Sie diesen für $|\boldsymbol{a}| \ll |\boldsymbol{r}|$ bis zu einschließlich linearer Ordnung um $|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{r}| = \mathbf{0}$. Sie können benutzen, dass $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = a^2 + 2ab\cos\phi + b^2$, wobei ϕ der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist. *Bonus: Warum gilt das?*

c) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld des Dipols in der Näherung aus Teil **b)** die Form

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{r}|^3}\right] + \mathcal{O}\Big(\frac{|\boldsymbol{a}|^3}{|\boldsymbol{r}|^5}\Big) \tag{10}$$

annimmt, wobei $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}$ das *Dipolmoment* ist.

d) Nutzen Sie ein Computerprogramm Ihrer Wahl (Mathematica, Python, Matlab, ...) um das exakte Feld $\boldsymbol{E}_{\text{exact}}$ aus Teil **a)** und die Näherung $\boldsymbol{E}_{\text{approx}}$ aus Teil **c)** in der x-y-Ebene darzustellen, mit $\boldsymbol{a} = \hat{e}_x$ und $\epsilon_0 = 1$. Plotten Sie außerdem den absoluten Fehler $|\boldsymbol{E}_{\text{approx}} - \boldsymbol{E}_{\text{exact}}|$ und den relativen Fehler $|\boldsymbol{E}_{\text{approx}} - \boldsymbol{E}_{\text{exact}}|/|\boldsymbol{E}_{\text{exact}}|$ in der x-y-Ebene. Plotten Sie für die Linien $\boldsymbol{r} = (t,0,0)$ und $\boldsymbol{r} = (0,t,0)$, $0.1 < t < 10$, den absoluten Fehler und verifizieren Sie graphisch die Fehlerabschätzung.
Hinweis: In Mathematica sind VectorPlot, ContourPlot und LogLogPlot für die Plots nützlich.