Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 3

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353
Abgabe: ***Montag***, *11.11.2024 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: ***Mittwoch***, *13.11.2024 in den Tutorien*

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_03_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

Hinweis 2: Manche Aufgaben verlangen Rechnungen und Zeichnung mit Computerprogrammen wie *Mathematica*. Fügen Sie die Programm-Codes, die zur Lösung des Problems von Ihnen geschrieben wurden, in Ihr Lösungs-PDF ein. Der Code muss hinreichend kommentiert oder selbsterklärend sein. Computergenerierte Zeichnungen und Skizzen sind ebenfalls in das Dokument einzufügen.

0. Zylinder- und Kugelkoordinaten

Definition der Differenzial-Operatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten

Im Folgenden kommen immer wieder Aufgaben vor, in denen Zylinder- oder Kugelkoordinaten benutzt werden oder hilfreich sind. Wir verwenden dabei folgende Notationen für den Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten x, y, z. Außerdem sei ϕ ein skalares Feld, $\mathbf{A}$ ein Vektorfeld und $\hat{e}_i$ der Einheitsvektor zur Koordinate i.

Zylinderkoordinaten ρ, φ, z:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \left(\hat{e}_\rho\partial_\rho + \hat{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\partial_\varphi + \hat{e}_z\partial_z\right)\phi & (2)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi A_\varphi + \partial_z A_z & (3)\\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \left[\frac{1}{\rho}\partial_\varphi A_z - \partial_z A_\varphi\right]\hat{e}_\rho + \left[\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z\right]\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho\left(\rho A_\varphi\right) - \partial_\varphi A_\rho\right]\hat{e}_z & (4)
\end{aligned}$$

mit $\rho > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Kugelkoordinaten r, ϑ, φ:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \left(\hat{e}_r\partial_r + \hat{e}_\vartheta\frac{1}{r}\partial_\vartheta + \hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\right)\phi & (6)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(A_\vartheta\sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi A_\varphi & (7)\\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\partial_\vartheta\left(A_\varphi\sin\vartheta\right) - \partial_\varphi A_\vartheta\right]\hat{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi A_r - \frac{1}{r}\partial_r\left(rA_\varphi\right)\right]\hat{e}_\vartheta \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\partial_r\left(rA_\vartheta\right) - \partial_\vartheta A_r\right]\hat{e}_\varphi & (8)
\end{aligned}$$

mit $r > 0$, $\vartheta \in [0, \pi)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

1. Elektrische Felder

5 + 15 + 12 = 32 Punkte

Eine Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ erzeugt das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\boldsymbol{r'}) \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^3} \,. \tag{9}$$

a) Betrachten Sie einen unendlich langen, elektrisch geladenen Draht, der durch die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \lambda\delta(x)\delta(y)$ mit der konstanten Linienladungsdichte λ beschrieben sei. Berechnen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ mittels Gleichung (9).

b) Betrachten Sie nun eine homogen geladene Kreisscheibe mit Radius R. In Zylinderkoordinaten sei die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma\,\Theta(R - \rho)\delta(z)$, wobei $\Theta(x)$ die Heavyside-Funktion ist. Die Heavyside-Funktion ist definiert als $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$. Berechnen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ mittels Gleichung (9) auf der z-Achse, also mit der Einschränkung $\boldsymbol{r} \equiv z\hat{e}_z$. Bestimmen Sie das führende Verhalten von $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ für $z \gg R$ und $0 < z \ll R$. Um welchen Wert springt das Feld bei $z = 0$? Wiederholen Sie die Rechnung für eine unendlich ausgedehnte Platte mit einem kreisförmigen Loch, $\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma\,\Theta(\rho - R)\delta(z)$, und vergleichen Sie die Ergebnisse.

c) Betrachten Sie nun eine Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i q\delta(\boldsymbol{r}_i)$ bestehend aus einer Verteilung von Punktladungen mit Ladung q an den Positionen $\boldsymbol{r}_i = am_i\hat{e}_x + an_i\hat{e}_y$ wobei a eine Länge ist. Die Koordinaten (m_i, n_i) der Punktladungen sind in der beigefügten Datei "Blatt_03_A1c_Punktladungen.dat" als Liste von Tupeln gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe von *Mathematica* das Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ auf den diskreten Positionen $\boldsymbol{r} = am\hat{e}_x + an\hat{e}_y$ mit $m = -64, -63, ..., 64$ und $n = -64, -63, ..., 64$. Zeichnen Sie ebenfalls in *Mathematica* die Ladungsverteilung sowie das elektrische Feld in der x-y-Ebene. Diskutieren Sie außerdem das Verhalten des elektrischen Feldes für große Entfernungen $32 < m < 512$ mit Bezug auf das Gauß'sche Gesetz, siehe auch Aufgabe 4.
Tipp: Sie können das Integral über Delta-Funktionen direkt als Summe über die Positionen der Punktladungen auswerten.
Hinweis: Sie können das beigefügte Mathematica-Notebook als Vorlage mit vielen nützlichen Funktionen nutzen. Statt Mathematica können Sie auch Python, Matlab oder Maple benutzen. Mathematica ist auf den Rechnern im Computerraum der Physik installiert.

2. Abgeschirmte Ladung

2 + 4 + 4 + 2 = 12 Punkte

Eine statische Ladungsverteilung erzeuge ein radiales elektrisches Feld, das in Kugelkoordinaten beschrieben wird durch

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = A\frac{e^{-r/\lambda}}{r}\hat{e}_r \tag{10}$$

wobei A und $\lambda > 0$ Konstanten sind.

a) Zeigen Sie, dass $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$.

b) Berechnen Sie die dazugehörige Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$.

c) Zeichnen Sie die dimensionslosen Größen $\rho(r)\lambda^2/(\epsilon_0 A)$ und $|\boldsymbol{E}(r)|\lambda/A$ als Funktion von r/λ mit Hilfe eines Computerprogramms, wobei $r = |\boldsymbol{r}|$.

d) Wie lautet die dazugehörige Gesamtladung Q? Erläutern Sie das Ergebnis unter Verwendung des Gauß'schen Gesetzes.

3. Elektrisches Potenzial

10 + 14 + 4 = 28 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Kandidaten für elektrische Felder:

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 d}(2xz\hat{e}_x + 2yz\hat{e}_y + (x^2+y^2)\hat{e}_z) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}(2x\hat{e}_x + 2x\hat{e}_y + 2x\hat{e}_z) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{E}_4(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{z^2}{\rho}\hat{e}_\varphi \quad \text{in Zylinderkoordinaten} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{E}_5(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{1+(r/d)^2}\hat{e}_r \quad \text{in Kugelkoordinaten ,} \tag{15}$$

wobei ρ_0 eine konstante Ladungsdichte und d eine Länge ist.

a) Berechnen Sie $\nabla \cdot \boldsymbol{E}_i$, $i = 1, ..., 5$. Welche der Felder $\boldsymbol{E}_i$ können das Resultat einer physikalisch sinnvollen Ladungsverteilung sein?

b) Berechnen Sie $\nabla \times \boldsymbol{E}_i$, $i = 1, ..., 5$. Bestimmen Sie für die wirbelfreien Felder das Potenzial $\phi(\boldsymbol{r})$, indem Sie $\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_0^r \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$ auswerten.
Tipp: Falls das Potenzial existiert, kann der Integrationspfad beliebig sein.

c) Ändert sich das Potenzial $\phi(\boldsymbol{r})$, wenn Sie den Startpunkt des Wegintegrals ändern? Ändert sich die Potenzialdifferenz $\phi(\boldsymbol{r}_1) - \phi(\boldsymbol{r}_2)$ zwischen zwei beliebigen Punkten $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$, wenn Sie den Startpunkt des Wegintegrals ändern?

4. Gauß'sches Gesetz

4 + 8 + 16 = 28 Punkte

Das Gauß'sche Gesetz lautet

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V dV \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \ , \tag{16}$$

wobei Q die im Volumen V eingeschlossene Ladung ist. Ziel dieser Aufgabe ist es, das Gauß'sche Gesetz zu nutzen, um für besonders symmetrische Fälle das elektrische Feld zu berechnen.

a) Betrachten Sie eine Punktladung im Ursprung, d.h. die Ladungsdichte sei $\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r})$. Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld radialsymmetrisch sein, d.h. es ist anzunehmen, dass $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \,||\, \hat{e}_r$. Aufgrund dieser Symmetrie wählen Sie als Integrationsvolumen V eine Kugel mit Radius R. Leiten Sie unter Verwendung des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ her.

b) Betrachten Sie einen unendlich langen, elektrisch geladenen Draht, der durch die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \lambda\delta(x)\delta(y)$ mit der konstanten Linienladungsdichte λ beschrieben sei, vgl. Aufgabe 1a. Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld radialsymmetrisch um die z-Achse sein, d.h. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \,||\, \hat{e}_\rho$. Aufgrund der Symmetrie wählen Sie als Integrationsvolumen V einen Zylinder mit Radius R und Länge L. Leiten Sie unter Verwendung des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ her.

c) Eine Kugelschale (Hohlkugel) wird beschrieben durch eine Kugel mit Radius R_2 aus der eine kleinere Kugel mit Radius $R_1 < R_2$ ausgespart ist. Betrachten Sie eine homogen geladene Kugelschale beschrieben durch die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho\,[\Theta(R_2 - r) - \Theta(R_1 - r)]$ in Kugelkoordinaten. Welche Richtung hat das elektrische Feld symmetriebedingt? Wählen Sie ein symmetriebedingt sinnvolles Integrationsvolumen V und leiten Sie analog zu den vorherigen Aufgabenteilen unter Verwendung des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ her. Diskutieren Sie das Ergebnis für die Grenzfälle (i) $R_2 \to 0$, (ii) $R_1 \to 0$ und (iii) $R_1 \to R_2$ unter der Bedingung, dass die Gesamtladung Q konstant bleibt. Diskutieren Sie für den Grenzfall (iii) insbesondere den Sprung des elektrischen Feldes an der Kugeloberfläche.