

① 29/32

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{mit } \rho(\vec{r}') = \lambda \delta(x') \delta(y')$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \lambda \delta(x') \delta(y') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Durch die Symmetrie lohnt es sich, das Problem in Zylinderkoordinaten zu betrachten.

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda \frac{(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z) - z'\hat{e}_z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2})^3}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho \cos\varphi (\cos\varphi \hat{e}_\rho - \sin\varphi \hat{e}_\varphi) + \rho \sin\varphi (\sin\varphi \hat{e}_\rho + \cos\varphi \hat{e}_\varphi) + z\hat{e}_z - z'\hat{e}_z}{(\sqrt{\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi + (z - z')^2})^3}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho \cos^2\varphi \hat{e}_\rho - \rho \cos\varphi \sin\varphi \hat{e}_\varphi + \rho \sin^2\varphi \hat{e}_\rho + \rho \sin\varphi \cos\varphi \hat{e}_\varphi + (z - z')\hat{e}_z}{(\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2})^3}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho \hat{e}_\rho + (z - z')\hat{e}_z}{(\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2})^2}$$

Wegen Zylindersymmetrie betrachten wir nur die Radialkomponente im Integral. Außerdem

Integral über $\hat{e}_z$ verschwindet

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho \hat{e}_\rho}{(\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2})^3}$$

Subst. $u = z - z'$
 $du = -dz' \Rightarrow dz' = -du$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\rho \hat{e}_\rho}{(\rho^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Subst. $u = \rho \tan\varphi$
 $du = \frac{\rho}{\cos^2\varphi} d\varphi$
 $\rho^2 + u^2 = \rho^2 (1 + \tan^2\varphi)$
 $= \rho^2 \frac{1}{\cos^2\varphi}$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\rho\frac{\pi}{2}}^{\rho\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho}{\cos^2\varphi} \frac{\rho \hat{e}_\rho}{\left(\rho^2 \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\rho\frac{\pi}{2}}^{\rho\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1}{\rho} \cos\varphi \hat{e}_\rho \quad \checkmark$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\rho} \sin\varphi \right]_{-a}^a \hat{e}_\rho \quad \checkmark$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\rho} \frac{u}{\sqrt{\rho^2 + u^2}} \right]_{-a}^a \hat{e}_\rho$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\rho} \frac{u}{u \sqrt{\frac{\rho^2}{u^2} + 1}} \right]_{-a}^a \hat{e}_\rho$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left[1 - (-1) \right] \hat{e}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \hat{e}_\rho \quad \checkmark$$

5

b) 10/15

$$\vec{r} = z \hat{e}_z \quad \vec{r}' = x' \hat{e}_x + y' \hat{e}_y + z' \hat{e}_z$$
$$\vec{r} - \vec{r}' = (z - z') \hat{e}_z - x' \hat{e}_x - y' \hat{e}_y$$

In Zyl.coord.:

$$\vec{r} - \vec{r}' = (z - z') \hat{e}_z - \rho' \cos \varphi (\cos \varphi \hat{e}_\rho - \sin \varphi \hat{e}_\varphi) - \rho' \sin \varphi (\sin \varphi \hat{e}_\rho + \cos \varphi \hat{e}_\varphi)$$
$$= (z - z') \hat{e}_z - (\rho' \cos^2 \varphi \hat{e}_\rho - \rho' \cos \varphi \sin \varphi \hat{e}_\varphi + \rho' \sin^2 \varphi \hat{e}_\rho + \rho' \sin \varphi \cos \varphi \hat{e}_\varphi)$$
$$= (z - z') \hat{e}_z - \rho' \hat{e}_\rho$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \left\{ \vec{\rho}(\vec{r}') = \sigma \Theta(R - \rho') \delta(z') \right.$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \sigma \Theta(R - \rho') \delta(z') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Wegen } \delta(z') \text{ muss} \\ z' = 0 \text{ sein} \end{array} \right.$$
$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \rho' \sigma(R - \rho') \frac{-\rho' \cos \varphi \hat{e}_x - \rho' \sin \varphi \hat{e}_y + z \hat{e}_z}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3}$$
$$= - \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^R \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \frac{\rho'}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3} \rho' \cos \varphi \hat{e}_x}_{=0} \quad \left[\begin{array}{l} G(R - \rho') \\ \text{liefert} \\ \text{Grenze von 0 bei } R \end{array} \right.$$
$$- \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^R \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \frac{\rho'}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3} \rho' \sin \varphi \hat{e}_y}_{=0}$$
$$+ \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \rho' \frac{z}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3} \hat{e}_z$$
$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \frac{\rho' z}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3} \hat{e}_z$$

Wegen 2π -Periodizität ist das Integral von 0 bis 2π über Sinus und Kosinus Null.

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot z \int_0^R \frac{\rho'}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3} \hat{e}_z \quad \checkmark (3)$$

$$= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right]_0^R \hat{e}_z$$

$$= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] \hat{e}_z$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{e}_z \quad \checkmark (2)$$

• $z \gg R$: $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{z\sqrt{\frac{R^2}{z^2} + 1}} \right] \hat{e}_z \xrightarrow{z \gg R} 0$

kleinere Ordnung $\hat{=}$ erste nicht verschwindende Ordnung

hier muss bis $\frac{1}{z} \frac{R^2}{z^2}$ entwickelt werden

$\Rightarrow$ In sehr weiter Entfernung zur Scheibe ist das elektrische Feld quasi Null.

• $0 < z < R$: $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \hat{e}_z \xrightarrow{0 < z < R} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z$

$\frac{R^2}{z^2} \rightarrow \frac{R^2}{z^2}$

$\Rightarrow$ Sehr nah an der Scheibe verhält sich das E-Feld wie das einer unendlich ausgedehnten Platte.

• $z = 0$: $\lim_{z \rightarrow 0} \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z$

$\lim_{z \rightarrow 0} \vec{E}(\vec{r}) = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \hat{e}_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z$

$\checkmark (1)$

Unendlich ausgedehnte Platte mit kreisförmigem Loch: $\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(\rho - R) \delta(z)$

$$\vec{r} = z \hat{e}_z, \quad \vec{r}' = x' \hat{e}_x + y' \hat{e}_y$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \sigma \delta(\rho' - R) \frac{z \hat{e}_z - x' \hat{e}_x - y' \hat{e}_y}{(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2})^3}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \theta(\rho' - R) \frac{z \hat{e}_z - \rho' \cos\varphi \hat{e}_x - \rho' \sin\varphi \hat{e}_y}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3}$$

$$= -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \rho' \frac{\rho' \cos\varphi}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3} \hat{e}_x$$

= 0

$$- \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \rho' \frac{\rho' \sin\varphi}{(\sqrt{\rho'^2 + z^2})^3} \hat{e}_y$$

= 0

$$+ \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi d\rho' \rho' \frac{z}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \hat{e}_z$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_R^{\infty} d\rho' \frac{\rho' z}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \hat{e}_z$$

Analyse Nachr wie oben
nur andere Grenzen für ρ' !

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right]_R^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{e}_z \quad \textcircled{3}$$

• $z \gg R$: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{z \sqrt{\frac{R^2}{z^2} + 1}} \hat{e}_z \xrightarrow{z \gg R} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{z} \hat{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{e}_z$

• $0 < z < R$: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{e}_z = ?$

$\rightarrow \frac{z}{R}$

Versuch fehlt

c) Siehe Anhang unten! ✓ (12/12)

② a) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} [\partial_{\vartheta} (t_{\varphi} \sin \vartheta) - \partial_{\varphi} t_{\vartheta}] \hat{e}_r + [\frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_{\varphi} t_r - \frac{1}{r} \partial_r (r t_{\varphi})] \hat{e}_{\vartheta} + \frac{1}{r} [\partial_r (r t_{\vartheta}) - \partial_{\vartheta} t_r] \hat{e}_{\varphi}$

$= \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_{\varphi} t_r \hat{e}_{\vartheta} - \frac{1}{r} \partial_{\vartheta} t_r \hat{e}_{\varphi}$

$= \frac{1}{r \sin \vartheta} \underbrace{\partial_{\varphi} A \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}}_{=0} \hat{e}_r - \frac{1}{r} \underbrace{\partial_{\vartheta} A \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}}_{=0} \hat{e}_{\varphi} = 0$ ✓ ②

b) $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 t_r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \frac{A e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}) = \frac{1}{r^2} (A e^{-\frac{r}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} r A e^{-\frac{r}{\lambda}}) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}} (\frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda})$

$\Rightarrow \rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}} (\frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda})$ ✓ ④

c) Siehe Anhang unten! ✓ ④

d) $Q = \int_V \rho(\vec{r}) d^3 r \stackrel{\text{Gaußsches Gesetz}}{=} \epsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3 r \stackrel{\text{S.v. Gauß}}{=} \epsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \hat{n} d\vec{f}$

$Q = \epsilon_0 \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}} r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = 4\pi A \int_0^R r e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$

$\Leftrightarrow Q = 4\pi A \lambda^2 \int_{-\frac{R}{\lambda}}^0 du u e^u = 4\pi A \lambda^2 \left[[u e^u]_0^{\frac{R}{\lambda}} - \int_0^{\frac{R}{\lambda}} du e^u \right]$

$= 4\pi A \lambda^2 \left[\left[-\frac{r}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]_0^R - \left[e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]_0^R \right]$

Integrationsvolumen ist Kugel um Ursprung mit $R \rightarrow \infty$

Subst. $u = -\frac{r}{\lambda}$
 $du = -\frac{dr}{\lambda}$
 $dr = -du \lambda$

$$= 4\pi A \lambda^2 \left[-\frac{R}{\lambda} e^{-\frac{R}{\lambda}} - e^{-\frac{R}{\lambda}} + 1 \right]$$

Benutzt über den ganzen Raum integrieren, d.h. r läuft von $0 \rightarrow \infty$
 $\Rightarrow$ dann kommt Null raus
 Vgl. mit Gauß fehlt

23/28
 510
 ③ $\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 d} (2xz\vec{e}_x + 2yz\vec{e}_y + (x^2+y^2)\vec{e}_z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 d} (\partial_x(2xz) + \partial_y(2yz) + \partial_z(x^2+y^2)) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 d} (2z + 2z) = \frac{\rho_0}{\pi\epsilon_0 d} z = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$\rho(\vec{r})$ ist nur z -abhängig, E -Feld muss bzgl. x, y konst. sein, was $\vec{E}_1$ aber nicht ist (nicht phys. sinnvoll) ✓ ①

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} (\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} 3 = \frac{3}{4} \frac{\rho_0}{\pi\epsilon_0} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Die Ladungsdichte ist im gesamten Raum konstant, das dadurch erzeugte E -Feld müsste also auch konstant sein, was aber nicht der Fall ist. (nicht phys. sinnvoll) ✓ ①

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} (\partial_x(2x) + \partial_y(2x) + \partial_z(2x)) = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Die Ladungsdichte ist im gesamten Raum konstant, das dadurch erzeugte E -Feld müsste also auch konstant sein, was aber nicht der Fall ist. (nicht phys. sinnvoll) ✓ ①

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_4(\vec{r}) \stackrel{(*)}{=} \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left(\frac{z^2}{\rho} \right) = 0 = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Die Ladungsdichte ist im gesamten Raum Null, somit kann eigentlich kein E -Feld entstehen (nicht phys. sinnvoll) ✓ ①

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_5(\vec{r}) &\stackrel{(*)}{=} \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \frac{r}{1 + \frac{r^2}{d^2}} \right) \right) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{3r^2}{1 + \frac{r^2}{d^2}} - \frac{r^3}{(1 + \frac{r^2}{d^2})^2} \frac{2r}{d^2} \right) \\ &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{1 + \frac{r^2}{d^2}} - \frac{2r^2}{(1 + \frac{r^2}{d^2})^2} \right) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Physikal. sinnvoll?

b) $\vec{\nabla} \times \vec{E}_1(\vec{r}) = \epsilon_{ijk} \partial_i E_j \hat{e}_k$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 d} \left[\left[\partial_y (x^2 + y^2) - \partial_z (2yz) \right] \hat{e}_x + \left[\partial_z (2xz) - \partial_x (x^2 + y^2) \right] \hat{e}_y + \left[\partial_x (2yz) - \partial_y (2xz) \right] \hat{e}_z \right]$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left[(2y - 2y) \hat{e}_x + (2x - 2x) \hat{e}_y \right] = \vec{0} \quad (\text{wirbelfrei}) \quad \checkmark \textcircled{1}$$

$$\phi(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{l}$$

$$= - \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 d} \int_0^{\vec{r}} (2xz \hat{e}_x + 2yz \hat{e}_y + (x^2 + y^2) \hat{e}_z)$$

Parametrisierung $\gamma: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$
 $\gamma(a) = \vec{r}, \gamma(0) = \vec{0}$

$$\phi(\vec{r}) = - \int_0^a \vec{E} \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = - \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 d} \int_0^a (2\gamma_1 \gamma_3 \gamma_1' + 2\gamma_2 \gamma_3 \gamma_2' + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \gamma_3') dt$$

Üboregung:
 Produktregel

$$= - \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 d} \left[\gamma_3 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \right]_0^a = - \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 d} (\gamma_3 (r_1^2 + r_2^2))$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = - \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} z (x^2 + y^2) \quad \checkmark \textcircled{3}$$

c) $\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left[(\partial_y z - \partial_z y) \hat{e}_x + (\partial_z x - \partial_x z) \hat{e}_y + (\partial_x y - \partial_y x) \hat{e}_z \right]$

$$= \vec{0} \quad (\text{wirbelfrei}) \quad \checkmark \textcircled{1}$$

$$\phi(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{s} = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \vec{E}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \quad \text{mit } \gamma: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma(a) = \vec{r}, \gamma(0) = \vec{0}$$

$$\phi(r_1, r_2, r_3) = - \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a (\gamma_1 \gamma_1' + \gamma_2 \gamma_2' + \gamma_3 \gamma_3') dt = - \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \gamma_1^2 + \frac{1}{2} \gamma_2^2 + \frac{1}{2} \gamma_3^2 \right]_0^a$$

$$= - \frac{\rho_0}{8\pi\epsilon_0} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \Rightarrow \phi(\vec{r}) = - \frac{\rho_0}{8\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2) \quad \checkmark \textcircled{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_3 = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left[(\partial_y(2x) - \partial_z(2x)) \hat{e}_x + (\partial_z(2x) - \partial_x(2x)) \hat{e}_y + (\partial_x(2x) - \partial_y(2x)) \hat{e}_z \right]$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left[-2 \hat{e}_y + 2 \hat{e}_z \right] \quad (\text{nicht wirbelfrei}) \quad \checkmark \textcircled{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_4 \stackrel{(4)}{=} \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left[-\partial_z \left(\frac{z^2}{r} \right) \hat{e}_\rho + \frac{1}{r} \partial_\rho \left(\rho \frac{z^2}{r} \right) \hat{e}_z \right]$$

$$= -\frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{r} \hat{e}_\rho \quad (\text{nicht wirbelfrei}) \quad \checkmark \textcircled{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_5 \stackrel{(8)}{=} \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \left(\frac{r}{1 + \frac{r^2}{d^2}} \right) \hat{e}_\vartheta - \frac{1}{r} \partial_\vartheta \left(\frac{r}{1 + \frac{r^2}{d^2}} \right) \hat{e}_\varphi \right] = \vec{0}$$

(wirbelfrei) $\checkmark \textcircled{1}$

$$\phi(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{s} = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt \quad \text{mit } \gamma: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow \gamma_r \hat{e}_r = \vec{r}(t)$$

$\vec{r}(a) = \vec{r}, \vec{r}(0) = \vec{0}$

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\gamma_r}{1 + \frac{\gamma_r^2}{d^2}} \gamma_r' dt, \quad \text{Subst. } u = \frac{\gamma_r^2}{d^2}, \quad dt = \frac{d^2}{2\gamma_r \gamma_r'} du$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho_0 d^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{r^2}{d^2}} \frac{1}{1+u} du = -\frac{\rho_0 d^2}{8\pi\epsilon_0} (\ln(1 + \frac{r^2}{d^2}) - \ln(1)) \Rightarrow \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_0 d^2}{8\pi\epsilon_0} \ln(1 + \frac{r^2}{d^2}) \quad \checkmark \textcircled{5}$$

c) $\textcircled{0/4}$ $\phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$$

$$\Rightarrow - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \phi(\vec{r}), \quad \phi(\vec{r}) \text{ hängt von } \vec{r}_1 \text{ ab.}$$

Das Ergebnis ist unabhängig vom Integrationsweg. $\checkmark$

Die Differenz hängt nicht vom Startpunkt ab!

(4) 28/28 $\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$

a) $\rho(\vec{r}) = q \delta(x) \delta(y) \delta(z)$

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E \rho \sin\theta d\varphi d\theta = 2\pi E(r) r^2 [-\cos\theta]_0^\pi = 2\pi E(r) r^2 (1+1)$$

$$= 4\pi E(r) r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r \quad \text{✓ (4)}$$

b) $\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho(\vec{r})$ mit $\rho(\vec{r}) = \lambda \delta(x) \delta(y)$

Betrachtung in Zylinder-Koordinaten, Zylinder mit Symmetrieachse = z-Achse als Integrationsvolumen

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \underbrace{d\vec{f} = d\vec{f} \hat{e}_\rho}_{\vec{E} \parallel \hat{e}_\rho} \cdot \underbrace{\rho d\varphi dz \hat{e}_\rho}_{\rho d\varphi dz \hat{e}_\rho} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda dz = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow E \cdot 2\pi L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{e}_r \quad \text{✓ (8)}$$



$$\rho(\vec{r}) = \rho [\Theta(R_2 - r) - \Theta(R_1 - r)]$$

Symmetriebedingung muss das E-Feld radial kugelsymmetrisch verlaufen: $\vec{E}(r) \parallel \hat{e}_r$.
Wir wählen also eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung als Integrationsvolumen. ✓ (2)

$$\oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho(\vec{r})$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} E r^2 \sin\theta d\varphi d\theta = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho_0 [\Theta(R_2 - r) - \Theta(R_1 - r)] r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr$$

• $r \leq R_1$: $\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r \underbrace{\rho_0 [\Theta(R_2 - r) - \Theta(R_1 - r)]}_{=0} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 0$ für $r < R_1$ ✓

• $R_1 < r \leq R_2$: $\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^r \underbrace{\rho_0 [\Theta(R_2 - r) - \Theta(R_1 - r)]}_{=1} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \frac{4\pi \rho_0}{3\epsilon_0} (r^3 - R_1^3)$

$$= 4\pi \epsilon_0 r^2 E \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (r^3 - R_1^3) \hat{e}_r \quad \text{✓}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad r > R_2: \quad \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \rho_0 \, p^2 \sin \theta \, dp \, d\varphi \, d\theta &= \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{3} p^3 \right]_{R_1}^{R_2} \\
 &= \frac{4\pi \rho_0}{3\epsilon_0} (R_2^3 - R_1^3) = 4\pi \epsilon_0 r^2 E \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3) \hat{e}_r \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r \quad \text{mit } Q \text{ als Gesamtladung der Kugelschale}
 \end{aligned}$$

Schreib lieber r statt p
 $\downarrow$ für Kugel $\downarrow$ für Kreisebene

(i) $Q = \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3) \rho_0 \stackrel{!}{=} \text{const.}$

$R_2 \rightarrow 0, \quad R_1 < R_2 \Rightarrow R_1 \rightarrow 0$

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r \Rightarrow \text{Vergleichbar mit } \vec{E}\text{-Feld einer Punktladung}$

(ii) $R_1 \rightarrow 0:$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{e}_r, & r \leq R_2 \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} R_2^3 \hat{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r, & r > R_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \text{Vergleichbar mit } \vec{E}\text{-Feld einer homogen geladenen Vollkugel mit Radius } R_2.$

(iii) $R_1 \rightarrow R_2:$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & r < R_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r > R_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \text{Vergleichbar mit } \vec{E}\text{-Feld eines infinitesimal dünnen Kugelschale.}$

Für $r = R_1 \rightarrow R_2$ springt das $\vec{E}$ -Feld unstetig zwischen 0 und $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$, was unphysikalisch wäre. In der Realität geht R_1 aber nie infinitesimal nach an R_2 und ist also nur für diesen Grenzfall problematisch.

TheoC Blatt 03

Aufgabe 1 c)

Import der Punktladungs-Positionen und der physikalischen Konstanten

```
In[ ]:= SetDirectory[NotebookDirectory[]];
pos = Import["Blatt_03_A1c_Punktladungendat.sec"];
<< PhysicalConstants`
ε0 := QuantityMagnitude@UnitConvert[Quantity["VacuumPermittivity"]]
```

... **General** : PhysicalConstants` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current functionality. See the Compatibility Guide for updating information.

Berechnung des elektrischen Feldes

```
In[ ]:=
k = 1 / (4 Pi ε0);
q = 1;

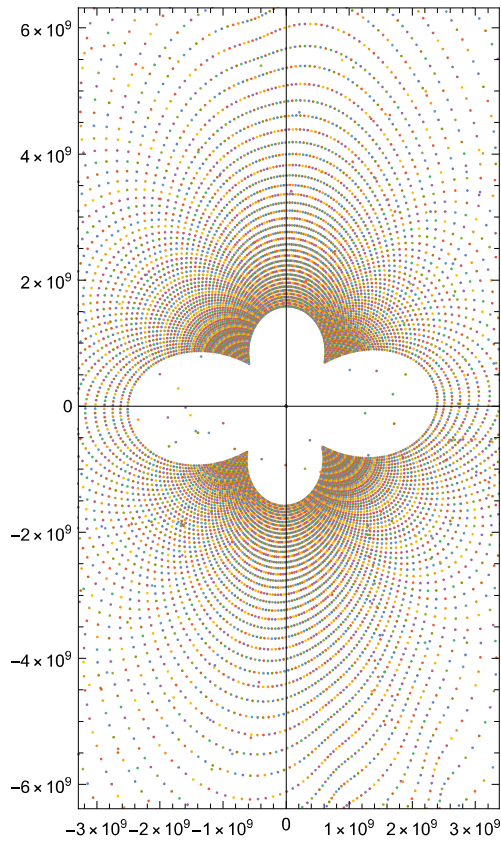
electricFieldContribution[{x_, y_}, {qx_, qy_}] :=
Module[{dx = x - qx, dy = y - qy, r}, r = Sqrt[dx^2 + dy^2];
If[r > 0, (k * q / r^3) * {dx, dy}, {0, 0}]]

Efield = Flatten[
ParallelTable[{x, y}, Total[electricFieldContribution[{x, y}, #] & /@ pos]],
{x, -64, 64}, {y, -64, 64}], 1];
```

4

Zeichne die Ladungsverteilung

In[]:= ListPlot[Efield, Frame → True, AspectRatio → Automatic]
 Out[]:=

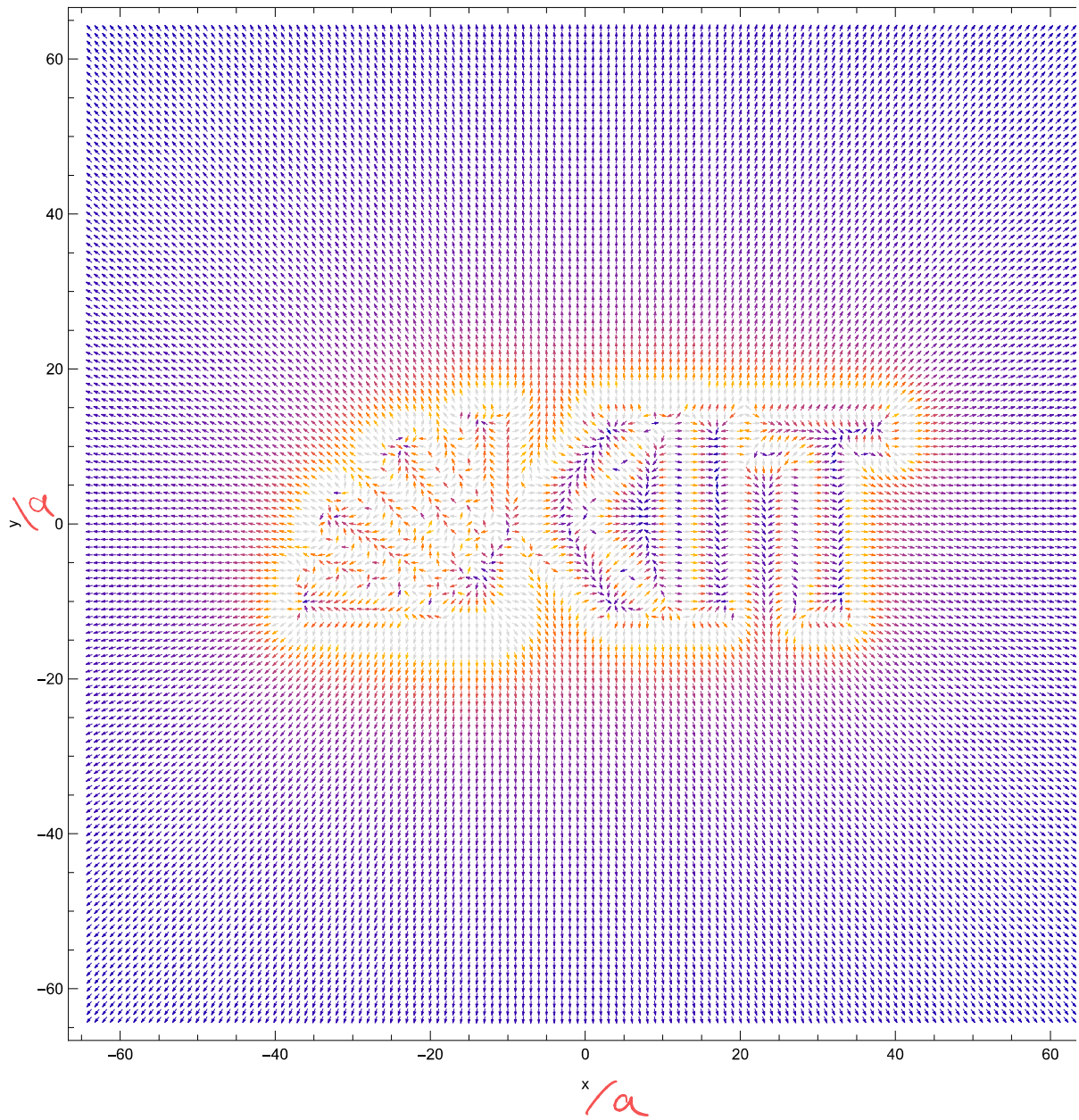


✓ ①

Zeichne E-Feld (wegen Symmetrie nur Pfeile in x-y-Ebene!)

```
In[ ]:= ListVectorPlot[Efield
, VectorPoints -> All
, ImageSize -> 640
, Frame -> True
, AspectRatio -> Automatic
, PlotRange -> All
, FrameLabel -> {"x", "y"}]
```

Out[]:=



Dim. $\log$!

Zeichne E-Feld, Version 2, eher qualitativ aber dafür sehr schön

```

In[ ]:= (* maximale Feldstärke, wird benötigt für Norm *)
max = Max[Norm[#[[2]]] & /@ Efield]

Out[ ]:=
 $6.89791 \times 10^{10}$ 

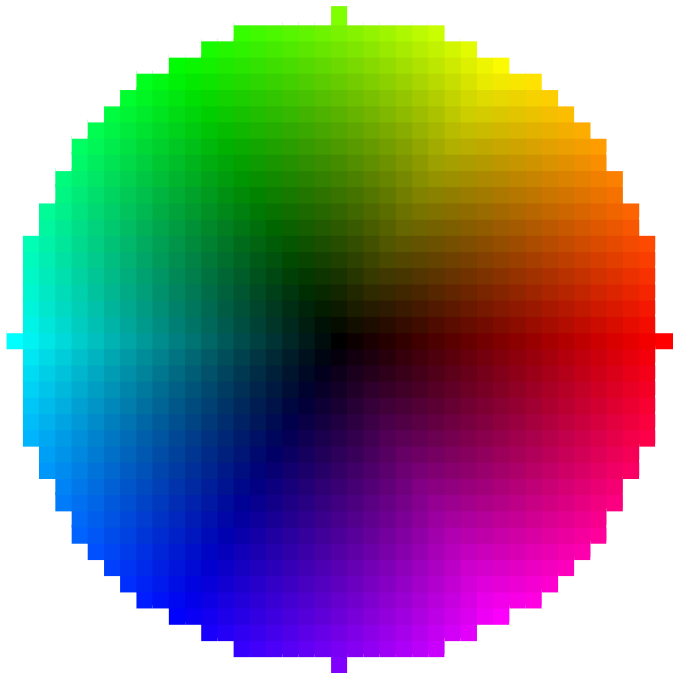
In[ ]:= (* erzeuge ein normiertes E-Feld: *)
EfieldNormalized = {#[[1]],  $\frac{\#[[2]]}{\text{max}}$ } & /@ Efield;

In[ ]:= (* Ein benutzerdefinierter ColorCode für Pfeile,
der häufig so ähnlich im Fachbereich Magnetismus verwendet wird: *)
CustomVectorColorCode[vec_] :=
  If[Norm[vec] == 0, Black, Hue[ArcTan[vec[[1]], vec[[2]]] / (2  $\pi$ ), 1, Norm[vec]]];

In[ ]:= (* Colorwheel zur Illustration,
welche Pfeile mit welcher Farbe codiert werden: *)
resolution = 1 / 20;
pixelMap = Quiet@Flatten[Table[
  {{vx, vy}, If[Norm[{vx, vy}] ≤ 1, CustomVectorColorCode[{vx, vy}], White]},
  {vx, -1, 1, resolution}, {vy, -1, 1, resolution}], 1];
Graphics[Table[{p[[2]],
  Rectangle[p[[1]] -  $\frac{\text{resolution}}{2}$  {1, 1}, p[[1]] +  $\frac{\text{resolution}}{2}$  {1, 1}], {p, pixelMap}]]

Out[ ]:=

```



```

In[ ]:= (* Konvertiere E-Feld in Pixel-Map mit CustomColorCode *)
EfieldCustomColorCode =
  {#[[1]], CustomVectorColorCode[#[[2]]]} & /@ EfieldNormalized;

```

```

In[ ]:= (** ACHTUNG! DIESE ZEILE KANN SEHR LANGE
          DAUERN UND DAS PROGRAMM SOGAR ZUM ABSTURZ BRINGEN. **)
(* Plot: E-Feld als Pixel-Map mit CustomColorCode *)
Graphics[Table[{p[[2]], Rectangle[p[[1]] -  $\frac{1}{2}$  {1, 1}, p[[1]] +  $\frac{1}{2}$  {1, 1}]},
               {p, EfieldCustomColorCode}]]

```

Out[]:=



(* Alternative: Zeichne direkt ein Bild als Pixel-Array. *)

```

In[ ]:= (* Forme die E-Feld-
          Map zurück in eine Matrix mit Partition. Der Rest sind Zusatzbefehle,
          die von Physiker-Konvention zu Graphiker-
          Konvention für Pixelkoordinaten konvertieren. *)
EfieldCustomColorCodeReshape =
  Reverse[Transpose[Partition[EfieldCustomColorCode[[All, 2]], 64 + 1 + 64]]];

```



```
In[ ]:= (* Zeichne das Bild: E-Feld *)  
Image[EfieldCustomColorCodeReshape, ImageSize -> 500]
```

Out[]:=



```

In[ ]:= (* Hier noch die Punktladungen zusammen mit dem E-Feld: *)
Show[
  (* Das E-Feld als Bild *)
  Image[EfieldCustomColorCodeReshape, ImageSize -> 500],
  (* Die Punktladungen im ListPlot als Overlay
     mit Offset um Effekt von Image[] zu kompensieren *)
  ListPlot[ (# + {64.5, 64.5}) & /@ pos, PlotStyle -> White]
]

```

Out[]:=



Limit großer Entfernung

In[]:= (* E-Feld auf der x-Achse für $x > 0$: *)

$k = 1 / (4 \pi \epsilon_0);$

$q = 1;$

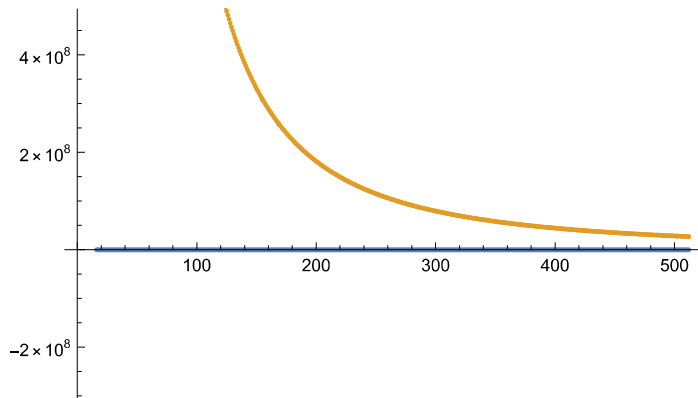
```
electricFieldContributionXKomponente[x_, {qx_, qy_}] :=
Module[{dx = x - qx, r}, r = Sqrt[dx^2];
If[r > 0, (k * q / r^3) * dx, 0]]
```

```
EfieldFarField =
ParallelTable[{
(* Orts-Koordinate *)
x,
(* E-Feld *)
{x, Total[electricFieldContributionXKomponente[x, #] & /@ pos]}
}, {x, 16, 512}];
```

In[]:= (* Zeichne die x- und y-Komponente *)

```
ListPlot[{
(* Ex *)
{#[[1]], #[[2, 1]]} & /@ EfieldFarField,
(* Ey *)
{#[[1]], #[[2, 2]]} & /@ EfieldFarField
}]
```

Out[]:=

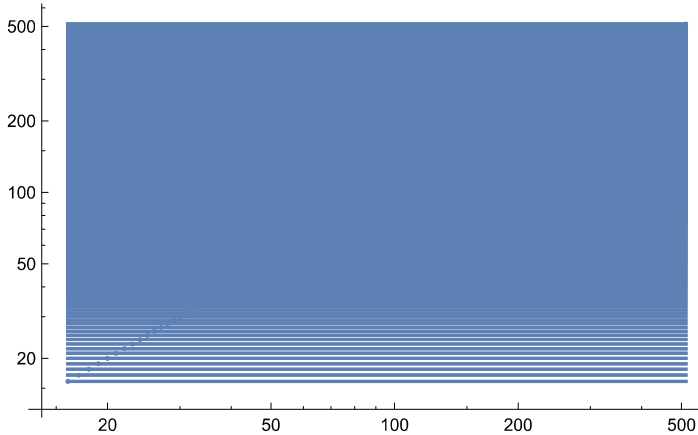


```

In[ ]:= (* Vergleiche die x-Komponente mit dem Ergebnis nach dem Gaußschen Satz: *)
Show[
  ListLogLogPlot[{
    (* Ex *)
    {#[[1]], Abs[#[[2, 1]]]} & /@ EfieldFarField
  }],
  LogLogPlot[EfieldFarField, {x, 16, 512}]
]

```

Out[]:=



Diskussion

Aufgabe 2 c)

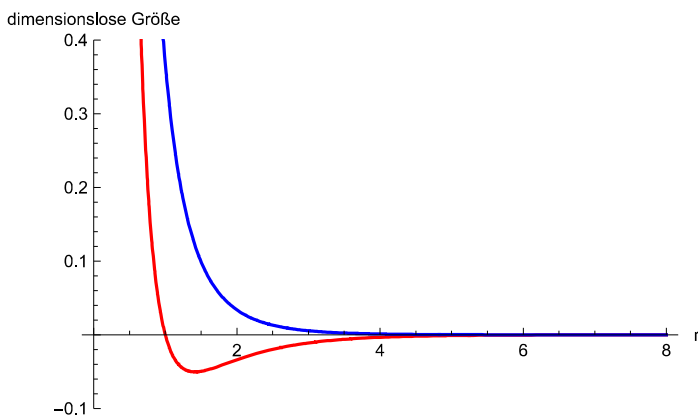
```

In[6]:= λ := 1
A := 1
ε0 := QuantityMagnitude@UnitConvert[Quantity["VacuumPermittivity"]]
ρ[r_] := (A * ε0 / r) * Exp[-r / λ] * (1 / r - 1 / λ)

Plot[{ρ[r] * λ^2 / (ε0 * A), (A / r * Exp[-r / λ]) * λ / r},
  {r, 0, 8}, PlotStyle -> {Red, Blue}, PlotRange -> {-0.1, 0.4},
  AxesLabel -> {"r", "dimensionslose Größe"},
  PlotLegends -> {"ρ(r) \frac{\lambda^2}{\epsilon_0 A}", "|E(r) \frac{\lambda}{A}|"}

```

Out[10]=



$$\text{— } \rho(r) \frac{\lambda^2}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{— } |E(r) \frac{\lambda}{A}|$$

