Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

# Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 4

*Wintersemester 2024/2025*

*Link:* https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353
**Abgabe:** ***Montag***, *18.11.2024 um 14:00 Uhr via ILIAS*
**Besprechung:** ***Mittwoch***, *20.11.2024 in den Tutorien*

**Hinweis:** Benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_04_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

## 1. Unendliche Kette von Punktladungen

*10 Punkte*

Betrachten Sie einen unendlich lange Kette von alternierenden Punktladungen $q_i = (-1)^i q$ an den Positionen $\boldsymbol{r}_i = ia\hat{e}_x$. Es sei $a$ der Abstand zwischen zwei benachbarten Punktladungen und $i \in \mathbb{Z}$ der Index der Ladungsposition. Bestimmen Sie die notwendige Arbeit *pro Ladung* um diese Anordnung zu erzeugen.
*Hinweis: Um die Summe auszuführen, ist es hilfreich die Taylorentwicklung von* $\ln(1+x)$ *um* $x = 0$ *zu betrachten.*

## 2. Kugelkondensator

*2 + 3 + 5 + 5 + 4 + 6 = 25 Punkte*

Betrachten Sie zwei konzentrische, metallene Sphären, $S_1$ und $S_2$, mit Radien $R_1$ und $R_2 > R_1$. Die Sphären sind elektrisch geladen mit den Ladungen $Q_1$ und $Q_2 = -Q_1$. Diese Anordnung ist ein *Kugelkondensator*.

**a)** Was ist das elektrische Feld im inneren der Sphäre $S_1$? Argumentieren Sie ohne Rechnung.

**b)** Berechnen Sie die Flächenladungsdichten $\sigma_1$ und $\sigma_2$ auf den jeweiligen Sphären.

**c)** Bestimmen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.

**d)** Leiten Sie aus dem elektrischen Feld das Potenzial $\phi(\boldsymbol{r})$ her, wobei $\phi(\boldsymbol{r} \to \infty) = 0$.

**e)** Skizzieren Sie $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ und $\phi(\boldsymbol{r})$.

**f)** Bestimmen Sie die Kapazität $C$ des Kugelkondensators.

## 3. Methode der Bildladungen, Teil 1

*1 + 1 + 4 + 6 + 4 + 8 + 8 + 4 + 4 = 40 Punkte*

Betrachten Sie eine geerdete, metallene Oberfläche mit Potenzial $\phi = 0$ bei $x = 0$. Zusätzlich befinde sich eine Punktladung $q < 0$ bei $\boldsymbol{r} = d\,\hat{e}_x$ mit $d > 0$, siehe Abbildung.

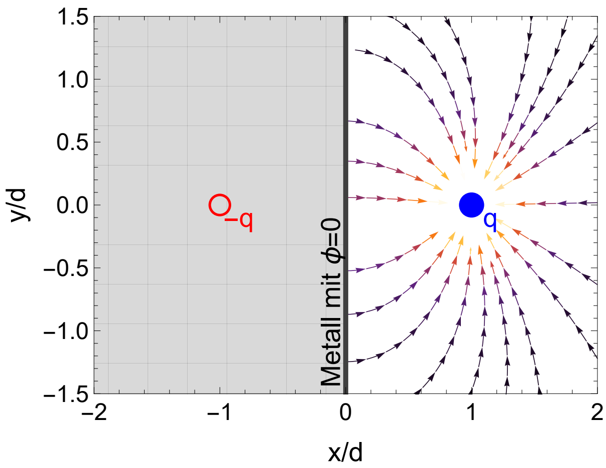


Abbildung 1: Ladung $q$ (blaue Kreisscheibe) und ihr elektrisches Feld in Anwesenheit einer metallenen Oberfläche. Die fiktive Bildladung $-q$ ist als Kreis dargestellt.

Dieses Problem im Halbraum $x > 0$ ist beschrieben durch die Poisson-Gleichung mit der Dirichlet-Randbedingung

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon_0} q\,\delta(x-d)\,\delta(y)\,\delta(z) \quad \text{für } x > 0 \tag{1}$$

$$\text{Dirichlet-Randbedingung:} \quad \phi(\boldsymbol{r})|_{x=0} = 0\ . \tag{2}$$

In dieser Aufgabe lernen Sie die *Methode der Bildladung* kennen, siehe im Skript Kapitel 3.10, welche für diese Art von Randwertproblemen mit hoher Symmetrie sehr nützlich ist.
Die partikuläre (oder "spezielle") Lösung dieser Poisson-Gleichung ist Ihnen bereits bekannt:

$$\phi_p(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}\ . \tag{3}$$

Diese spezielle Lösung erfüllt jedoch die Randbedingungen (2) nicht. Da die Poisson-Gleichung (1) linear in $\phi$ ist, ist $\phi = \phi_p + \phi_h$ ebenfalls eine Lösung, sofern $\nabla^2\phi_h = 0$. $\phi_h(\boldsymbol{r})$ nennt man auch *homogene Lösung* der Differenzialgleichung.

**a)** Zeigen Sie, dass die partikuläre Lösung (3) alleine nicht die Randbedingung (2) erfüllt.

**b)** Zeigen Sie, dass das Potenzial $\phi_B$ einer Punktladung $-q$ positioniert bei $\boldsymbol{r} = -d\,\hat{e}_x$ eine homogene Lösung $\phi_h = \phi_B$ der Poisson-Gleichung (1) ist. Dies ist die ***Bildladung*** (oder auch *Spiegelladung*). Die Bildladung wird durch Spiegelung der Ladung $q$ an der metallischen Oberfläche erzeugt wird. Im Gegensatz zur realen, physikalischen Ladung $q$ ist die Bildladung nur eine fiktive Ladung. Die reale Ladungsverteilung im Metall konzentriert sich auf der Oberfläche $x = 0$ und erzeugt von dort ein Potenzial, welches dem der fiktiven Bildladung entspricht.

**c)** Betrachten Sie nun das gesamte Potenzial $\phi = \phi_p + \phi_h$ als Summe aus der partikulären Lösung $\phi_p$ aus Gleichung (3) und der homogenen Lösung $\phi_h = \phi_B$ aus Teil **b)**. Zeigen Sie, dass das Potenzial $\phi$ die Dirichlet-Randbedingung (2) erfüllt.

**d)** Berechnen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ im Halbraum $x > 0$. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ für $x \to 0^+$ senkrecht auf der metallenen Oberfläche steht.

**e)** Argumentieren Sie, dass $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$ für $x < 0$.

**f)** Zeichnen Sie jeweils die physikalischen Lösungen $\phi(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ mit einem Computerprogramm, z. B. mit *Mathematicas* ContourPlot bzw. VectorPlot, für $-2d < x < 2d$, analog zur Abbildung. Zeichnen Sie zum Vergleich auch die Lösungen unter der Annahme, dass die Bildladung real sei.

**g)** Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte $\sigma(\boldsymbol{r}|_{x=0})$, genannt *influenzierte Oberflächenladungsdichte*, aus dem Sprung des elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ bei $x = 0$. Zeichnen Sie $\sigma(\boldsymbol{r}|_{x=0})$. Sie können dafür ein Computerprogramm nutzen.

**h)** Bestimmen Sie die gesamte influenzierte Ladung auf der Metallwand.

**i)** Wie groß ist die Kraft, welche auf die echte Punktladung $q$ wirkt?

## 4. Methode der Bildladungen, Teil 2

*4 + 4 + 12 = 20 Punkte + 4 Bonuspunkte*

Betrachten Sie einen metallenen Winkel bestehend aus zwei senkrecht zueinander stehenden, halbunendlich langen Metallplatten bei $x = 0$ und $y = 0$, sowie einer Punktladung $q$ bei $\boldsymbol{r} = d\hat{e}_x + (d/2)\hat{e}_y$:

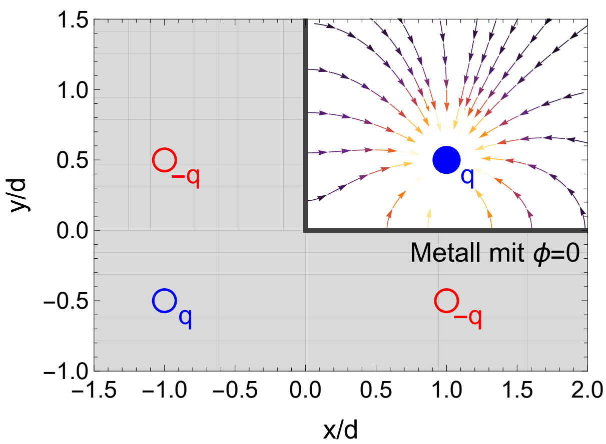


Abbildung 2: Ladung $q$ (blaue Kreisscheibe) und ihr elektrisches Feld in Anwesenheit einer metallenen Oberfläche mit rechtem Winkel. Die drei fiktiven Bildladungen sind als Kreise dargestellt.

Dieses Problem kann ebenfalls mit der Bildladungsmethode gelöst werden. Die Metalloberflächen erzeugen jeweils eine primäre Bildladung mit jeweils $-q$ als Spiegelbild von $q$. Zusätzlich entsteht noch eine sekundäre Bildladung $q$ bei $\boldsymbol{r} = -(d\hat{e}_x + (d/2)\hat{e}_y)$ als Spiegelbild der beiden primären Bildladungen. Insgesamt gibt es also *drei* Bildladungen in diesem Problem.
Nutzen Sie die Bildladungsmethode analog zur vorherigen Aufgabe, um die influenzierte Oberflächenladungsdichte $\sigma(\boldsymbol{r})$ auf der Metalloberfläche zu berechnen. Gehen Sie dazu vor, wie in den Aufgabenteilen beschrieben:

**a)** Zeigen Sie, dass die Superposition der Potenziale der realen Ladung und der drei Bildladungen das Randwertproblem löst.

**b)** Bestimmen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.

**c)** Berechnen Sie die influenzierte Oberflächenladungsdichte $\sigma(\boldsymbol{r})$ aus dem Sprung des elektrischen Feldes. Zeichnen Sie $\sigma(\boldsymbol{r})$ mit einem Computerprogramm.

**d)** 4 Bonuspunkte: Integrieren Sie $\sigma(\boldsymbol{r})$ und zeigen Sie, dass die gesamte influenzierte Ladung $Q = -q$ ist. Sie können dafür ein Computerprogramm wie *Mathematica* benutzen.

## 5. Methode der Bildladungen, Teil 3

*5 Punkte*

Betrachten Sie eine Punktladung $q$ bei $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ zwischen zwei parallelen, metallenen Wänden beschrieben durch $x = -d$ und $x = d$.
Auch hier lässt sich die Methode der Bildladung anwenden: Analog zur Situation mit realen Spiegeln, in denen Sie nun unendlich oft abwechselnd Ihr Gesicht und ihren Hinterkopf im Spiegel betrachten könnten, werden unendlich viele alternierende Ladungen erzeugt. Das System mit den fiktiven Bildladungen gleicht dann dem System aus Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass diese Anordnung von realer Punktladung und Bildladungen die Poisson-Gleichung (1) sowie die Dirichlet-Randbedingung (2) erfüllt.