
Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 5

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353

Abgabe: **Montag**, 25.11.2024 um 14:00 Uhr via ILIAS

Besprechung: **Mittwoch**, 27.11.2024 in den Tutorien

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen vor dem Upload im Format "Blatt_05_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

1. Separation der Variablen in kartesischen Koordinaten

$6 + 8 + 6 + 10 = 30$ Punkte

In der Vorlesung wurde die Methode der *Separation der Variablen* in Kugelkoordinaten diskutiert. Die Methode ist hilfreich für die Lösung von partiellen Differenzialgleichungen, wie zum Beispiel der Laplace- oder Poisson-Gleichung, insbesondere unter hohen Symmetrien. In dieser Aufgabe wird die Methode der Separation der Variablen in *kartesischen Koordinaten* diskutiert, siehe auch im Skript Kapitel 3.11.1.

Betrachten Sie ein ladungsfreies Volumen V . Innerhalb des Volumens genügt das elektrostatische Potenzial ϕ somit der Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

wobei der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten betrachtet wird, $\mathbf{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$. Analog zur Separation der Variablen in Kugelkoordinaten wird angenommen, dass $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$ als Produkt von unabhängigen Funktionen geschrieben werden kann, die jeweils nur von einer der Ortsvariablen abhängen:

$$\phi(x, y, z) = A(x)B(y)C(z). \quad (2)$$

a) Nutzen Sie den Ansatz (2) und zeigen Sie, dass die Laplace-Gleichung (1) in drei Differenzialgleichungen zerfällt:

$$\partial_x^2 A = \alpha^2 A, \quad \partial_y^2 B = \beta^2 B, \quad \partial_z^2 C = \gamma^2 C, \quad \text{mit } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \quad (3)$$

Sie brauchen nicht zu zeigen, dass die Lösungen der Differenzialgleichungen formal von der Form $A(x) = a_+ e^{\alpha x} + a_- e^{-\alpha x}$ sind, wobei α , β und γ konstante, komplexe Zahlen sind.

b) Sei nun das Volumen V durch einen Quader mit der Seitenlängen L_x , L_y , und L_z entlang x , y , und z gegeben. Auf dem Rand bei $x = L_x$ sei ein Potenzial $\phi(L_x, y, z) = V(y, z)$ vorgegeben. Alle anderen Ränder seien metallisch mit $\phi = 0$. Zeigen Sie, dass mit Hilfe des Separationsansatzes aus a) folgt, dass

$$\phi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} d_{m,n} \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2} x\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right). \quad (4)$$

c) Bestimmen Sie $\phi(x, y, z)$ aus dem Ergebnis von Teil **b)** für das Randpotenzial

$$V(y, z) = \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L_z}\right). \quad (5)$$

d) Bestimmen Sie $\phi(x, y, z)$ aus dem Ergebnis von Teil **b)** für das Randpotenzial

$$V(y, z) = y(y - L_y)z(z - L_z). \quad (6)$$

2. Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

$5 + 10 + 5 + 10 + 5 + 5 = 40$ Punkte

Betrachten Sie eine inhomogen geladene Kugel mit Radius R . Die Ladungsdichte in Kugelkoordinaten sei gegeben durch

$$\rho(r, \vartheta) = \rho_0 \frac{R}{r^2} (R - 2r) \Theta(R - r) \sin \vartheta, \quad (7)$$

wobei $\Theta(R - r)$ die Heaviside-Distribution und ρ_0 eine Konstante ist. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Multipolentwicklung des elektrostatischen Potenzials ϕ dieser Ladungsverteilung in Kugelkoordinaten durchzuführen. Dafür bestimmen Sie folgend einige der sphärischen Multipolmomente q_{lm} , siehe im Skript Kapitel 3.12.2.

- a) Zeigen Sie, dass die Gesamtladung $Q = \int d^3r \rho(\mathbf{r})$ verschwindet. Was folgt für das Multipolmoment q_{00} ?
- b) Zeigen Sie, dass alle Multipolmomente q_{lm} mit $l = 1$ und $m = -1, 0, 1$ ebenfalls verschwinden.
- c) Zeigen Sie, dass alle Multipolmomente mit $m \neq 0$ und beliebigem $l \in \mathbb{N}$ verschwinden, $q_{lm} = 0$.
- d) Berechnen Sie das niedrigste nicht-verschwindende Multipolmoment q_{20} .
- e) Die Legendre-Polynome $P_l(x)$ sind für alle ungeraden l ungerade Funktionen, d. h. $P_l(-x) = -P_l(x)$. Betrachten Sie nun in der Multipolentwicklung den Fall $m = 0$ und ungerades l : $q_{l0} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (r')^l P_l(\cos \vartheta')$. Teilen Sie in dieser Formel das Integral bei $z' = 0$, indem Sie die Integration über den Polarwinkel ϑ' in die Bereiche $0 < \vartheta' < \pi/2$ und $\pi/2 < \vartheta' < \pi$ aufteilen. Nutzen Sie die eingangs genannte Symmetrie der Legendre-Polynome um zu zeigen, dass $q_{l0} = 0$ für alle ungeraden l .

- f) Ziel dieses letzten Aufgabenteils ist es, die Genauigkeit der Multipolentwicklung besser zu verstehen. Machen Sie sich dazu zuerst klar (ohne Punkte), warum das Gauß'sche Gesetz mit dem Integrationsvolumen in Form einer Kugel, wie häufig in den Aufgaben auf den letzten Blättern verwendet, hier keine gute Näherung wäre. Berechnen Sie nun analytisch das zweitniedrigste nicht-verschwindende Multipolmoment q_{40} . Sie können dazu ein Computerprogramm wie *Mathematica* benutzen. Es bezeichnen $\phi_{20}(r, \vartheta)$ und $\phi_{40}(r, \vartheta)$ die Potenzialbeiträge durch q_{20} und q_{40} in der Multipolentwicklung. Wenn man die Multipolentwicklung bereits bei ϕ_{20} abbricht, kann man den relativen Fehler dieser Näherung durch $\epsilon(r, \vartheta) = |\phi_{40}/\phi_{20}|$ abschätzen. Zeichnen Sie mit einem Computerprogramm die Funktionen ϕ_{20} , ϕ_{40} und ϵ als Funktion von r/R jeweils für $\theta = 0$ und $\theta = \pi/2$. Sie sehen, dass der Fehler $\epsilon(r)$ monoton fallend ist. Wir definieren den ϑ -abhängigen kritischen Abstand $r_1(\vartheta)$, überhalb welchem der Fehler ϵ kleiner als 1% ist, also via $\epsilon(r_1, \vartheta) = 0.01$. Zeichnen Sie auch die Kurve $r_1(\vartheta)$. Sie erhalten so einen Einblick in die richtungsabhängige Genauigkeit der Multipolentwicklung.

3. Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ Punkte + 6 Bonuspunkte

Betrachten Sie nacheinander die folgenden Anordnungen von Punktladungen. Berechnen Sie die kartesischen Multipolmomente bis inklusive der Quadrupolordnung. Berechnen Sie daraus das Potenzial $\phi(\mathbf{r})$ in großer Entfernung $|\mathbf{r}| \gg a$.

- Punktladung q bei $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$.
- Punktladung q bei $\mathbf{r}_0 = a\hat{e}_x$.
- Dipol mit Punktladungen q bei $\mathbf{r}_0 = -(a/2)\hat{e}_x$ und $-q$ bei $\mathbf{r}_1 = (a/2)\hat{e}_x$.
- Dipol mit Punktladungen $2q$ bei $\mathbf{r}_0 = -(a/2)\hat{e}_x$ und $-q$ bei $\mathbf{r}_1 = (a/2)\hat{e}_x$.
- Quadrupol (vgl. Blatt 4, Aufgabe 4) mit Punktladungen q bei $\mathbf{r}_0 = a\hat{e}_x + (a/2)\hat{e}_y$, $-q$ bei $\mathbf{r}_1 = -a\hat{e}_x + (a/2)\hat{e}_y$, $-q$ bei $\mathbf{r}_2 = a\hat{e}_x - (a/2)\hat{e}_y$ und q bei $\mathbf{r}_3 = -a\hat{e}_x - (a/2)\hat{e}_y$.
- 3 + 3 Bonuspunkte: Stellen Sie für Teil **d)** und **e)** das exakte Potenzial in der x-y-Ebene graphisch mit Mathematica dar. Sie finden im Forum auf ILIAS eine Mathematica-Vorlage für die Benutzung von ContourPlot für diese Art von Zeichnung. Vergleichen Sie das exakte Potenzial mit der Multipolentwicklung bis zur (i) Monopolordnung, (ii) Dipolordnung, (iii) Quadrupolordnung. Zeichnen Sie dafür sowohl die jeweiligen Potenziale sowie die Differenz zwischen dem exakten Potenzial und der Näherung zu jeweiliger Ordnung.