Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 6

Wintersemester 2024/2025

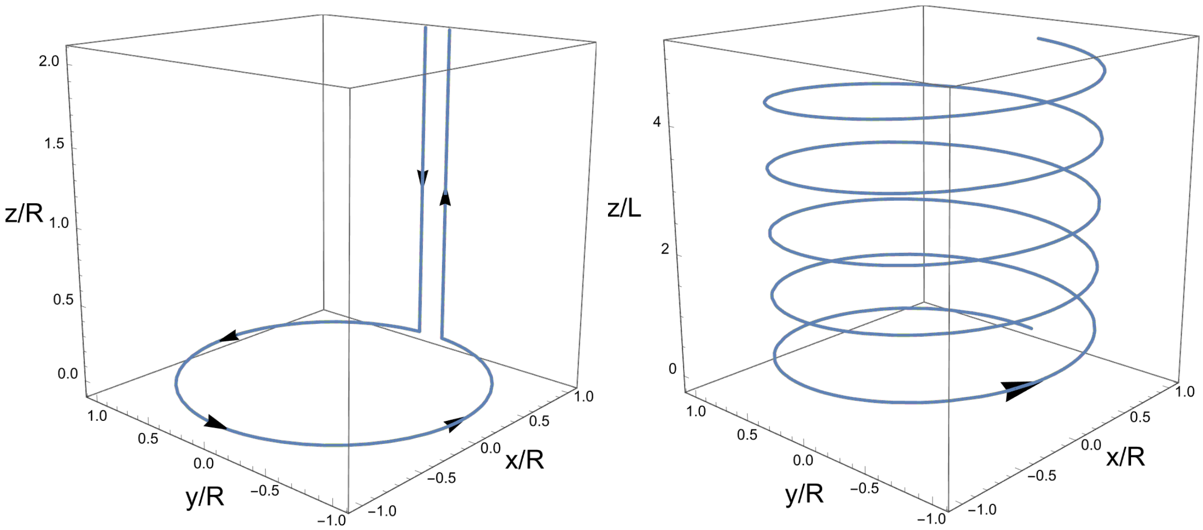
Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353

Abgabe: ***Montag***, *02.12.2024 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: ***Mittwoch***, *04.12.2024 in den Tutorien*

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_06_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

1. Leiterschleife, Spule und das Biot-Savart-Gesetz

10 + 15 + 15 = 40 Punkte + 10 Bonus



Ein metallener Draht (blaue Linie) ist zu einer Leiterschleife (links) oder einer Spule (rechts) gewickelt. Die schwarzen Pfeile deuten die Orientierung der Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ an.

Eine Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ erzeugt eine magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ beschrieben durch das Biot-Savart-Gesetz

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \right) , \tag{1}$$

siehe auch im Skript Kapitel 4.3. Ziel dieser Aufgabe ist es, das Gesetz anzuwenden und so die magnetische Flussdichte von Leiterschleifen und Spulen kennenzulernen.

a) Betrachten Sie eine *ideale Leiterschleife*, also einen Ring mit Radius R, in dem ein Strom im Kreis fließt. Die Stromdichte für diese Anordnung ist in Zylinderkoordinaten gegeben durch $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = I_0 \hat{e}_\varphi \, \delta(\rho - R) \, \delta(z)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes, dass die magnetische Flussdichte auf der z-Achse $\boldsymbol{r} = z\hat{e}_z$ gegeben ist durch, $\boldsymbol{B}(z\hat{e}_z) = B(z)\hat{e}_z$, mit

$$B(z) = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

b) Betrachten Sie nun eine *realistischere Leiterschleife*, die ähnlich wie in der linken Abbildung mit zwei geraden Kabeln entlang der z-Achse verbunden ist, die den Strom der Schleife zuführen bzw. entnehmen. Die Leiterschleife ist kein vollständiger Kreis, sondern ein Winkelstück $2\varphi_0$ fehle. Die Stromdichte sei gegeben durch $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}_3(\boldsymbol{r})$ mit

$$\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r}) = -(I_0/\rho)\,\hat{e}_z\,\delta(\rho - R)\,\delta(\varphi - \varphi_0)\,\Theta(z), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r}) = I_0\,\hat{e}_\varphi\,\delta(\rho - R)\Theta(\varphi - \varphi_0)\Theta(2\pi - \varphi_0 - \varphi)\,\delta(z), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{j}_3(\boldsymbol{r}) = +(I_0/\rho)\,\hat{e}_z\,\delta(\rho - R)\,\delta(\varphi + \varphi_0)\,\Theta(z). \tag{5}$$

Berechnen Sie $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ bei $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Was erhalten Sie im Grenzfall $\varphi_0 \to 0$? Vergleichen Sie mit Aufgabenteil **a)**.

c) Die rechte Abbildung zeigt ein Modell einer *realistischen Spule*, bei der ein stromdurchflossener Draht auf einer helikalen Bahn gewickelt ist. Der Draht in der Abbildung ist in Zylinderkoordinaten beschrieben durch

$$\boldsymbol{r}'(\varphi) = R\hat{e}_\rho + \frac{L\varphi}{2\pi}\hat{e}_z\ , \tag{6}$$

sodass R der Radius der Wickelung und L der Abstand zwischen Wickelungen ist. Die Spule sei unendlich lang, beschrieben durch $\varphi \in [-\infty, +\infty]$. Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ wobei $\int dxdy\,|\boldsymbol{j}| = I_0$. Berechnen Sie mit dem Biot-Savart-Gesetz die z-Komponente $B_z(\boldsymbol{r})$ der Flussdichte auf $\boldsymbol{r} = z\hat{e}_z$ und zeigen Sie, dass

$$B_z(z) = \mu_0 I_0 \frac{2\pi R}{L\sqrt{L^2 + (2\pi R)^2}}\ , \tag{7}$$

unabhängig von z ist.

d) 10 Bonuspunkte: Ein einfacheres Modell für eine *dicht gewickelte Spule* mit $L \ll R$ ist ein Zylinder mit Radius R, auf dem der Strom im Kreis fließt. Berechnen Sie mit dem Biot-Savart-Gesetz $B_z(\boldsymbol{0})$. Zeigen Sie, dass das Ergebnis konsistent mit dem Ergebnis aus **c)** ist.
*Hinweis: Sie können das Ergebnis aus Teil **a)** benutzen. Nutzen Sie dazu aus, dass ein Zylinder als eine Summe von unendlich dicht nebeneinanderliegenden Ringen verstanden werden kann. Im Limes kleiner Abstände wird dann die Summe* $\sum_n B_z(n\Delta z)$ *zum Integral* $\frac{1}{\Delta z}\int dz\, B_z(z)$ *wobei hier* $\Delta z = L$ *ist.*

2. Magnetfeld eines Koaxialkabels und das Ampèresche Gesetz

10 + 15 = 25 Punkte

Das Ampèresche Gesetz, siehe Skript Kapitel 4.4, ist das magnetostatische Analogon zum Gauß'schen Gesetz in der Elektrostatik:

$$\oint_{\partial F} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 I_F\ . \tag{8}$$

Für hinreichend symmetrische Probleme kann über die Wahl einer geeigneten Fläche F mit einem passenden Ansatz die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$ bestimmt werden. In dieser Aufgabe nutzen Sie das Ampèresche Gesetz um die besondere Eigenschaft eines Koaxialkabels kennenzulernen.

a) Betrachten Sie ein Kabel von endlicher Dicke mit einer homogenen Stromdichte. In Zylinderkoordinaten können wir die Stromdichte schreiben als $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = j_0 \hat{e}_z \, \Theta(R - \rho)$, wobei R der Radius des Kabels ist. Nutzen Sie das Ampèresche Gesetz, um die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}(\rho)$ innerhalb und außerhalb des Kabels zu bestimmen. Skizzieren Sie $\boldsymbol{B}(\rho)$.

b) Ein Koaxialkabel besteht aus zwei Kabeln: Einem inneren Kabel mit Radius R_1, welches den Strom I_1 leitet, umgeben von einer isolierenden Schicht im Bereich $R_1 < \rho < R_2$, und einem äußeren Kabel im Bereich $R_2 < \rho < R_3$, welches den Strom I_2 leitet. Nutzen Sie das Ampèresche Gesetz, um die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}(\rho)$ innerhalb und außerhalb des Koaxialkabels zu bestimmen. Skizzieren Sie $\boldsymbol{B}(\rho)$ für den Fall $I_1 = -I_2 \equiv I_0$. Was ergibt sich in diesem Fall für $\boldsymbol{B}(\rho)$ für $\rho > R_3$?

3. Fernfeld der rotierenden Sphäre

5 + 10 + 10 + 10 = 35 Punkte

Betrachten Sie eine Sphäre mit Radius R und Oberflächenladung σ_0, die mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{e}_z$ rotiert. In den folgenden Aufgabenteilen berechnen Sie die magnetische magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ in der Dipolentwicklung, also für große Distanzen $|\boldsymbol{r}| \gg R$.

a) Zeigen Sie, dass die Stromdichte in Kugelkoordinaten die Form $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sigma_0 R \omega \sin\vartheta \hat{e}_\varphi \delta(r - R)$ annimmt.

b) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment $\boldsymbol{m}$.

c) Bestimmen Sie das Vektorpotenzial $\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{r})$ in der Dipolnäherung und daraus die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}^{(1)}(\boldsymbol{r})$.

d) Eine exakte Lösung des Vektorpotenzials ist

$$\boldsymbol{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0 \omega \sigma R^3}{3} \frac{r_<}{r_>^2} \sin\theta \hat{e}_\varphi \tag{9}$$

mit $r_< = \min\{r, R\}$ und $r_> = \max\{r, R\}$. Bestimmen Sie $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus **c)**.
Hinweis: Gleichung (9) soll hier **nicht** *hergeleitet werden. Für eine Herleitung würde das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen aus Kapitel 3.12.1 des Skriptes benötigt werden.*