

$$\textcircled{1} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left(\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

$$a) \quad \vec{r} = z \hat{e}_z, \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -\rho \cos \varphi \\ -\rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{j}(\vec{r}') = I_0 \hat{e}_\varphi \delta(\rho - R) \delta(z),$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} -I_0 \sin \varphi \\ I_0 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho \cos \varphi \\ -\rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_0 z \cos \varphi \\ I_0 z \sin \varphi \\ I_0 R \sin^2 \varphi + I_0 R \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = I_0 \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ R \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ -z \sin \varphi \\ R \end{pmatrix} R d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left(\begin{pmatrix} z \sin \varphi \\ -z \cos \varphi \\ R \end{pmatrix} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \int_0^{2\pi} R d\varphi = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_z$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi R \end{pmatrix} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad -1p \text{ für unsauberes Aufsetzen}$$

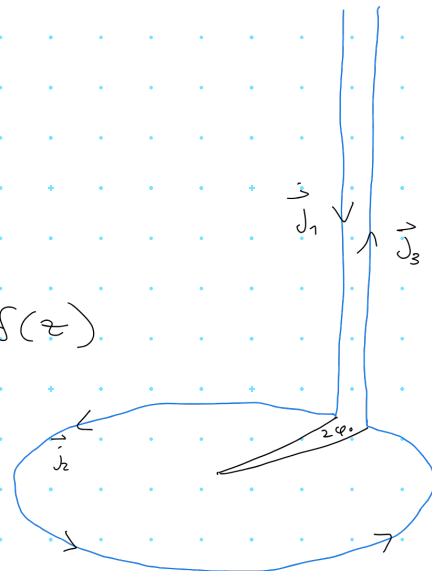
$$\Rightarrow \vec{B}(z \hat{e}_z) = B(z) \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_z$$

$$b) \quad \vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_1(\vec{r}) + \vec{j}_2(\vec{r}) + \vec{j}_3(\vec{r})$$

$$\text{mit } \vec{j}_1(\vec{r}) = - \left(\frac{I_0}{\rho} \right) \hat{e}_z \delta(\rho - R) \delta(\varphi - \varphi_0) \Theta(z)$$

$$\vec{j}_2(\vec{r}) = I_0 \hat{e}_\varphi \delta(\rho - R) \Theta(\varphi - \varphi_0) \Theta(2\pi - \varphi_0 - \varphi) \delta(z)$$

$$\vec{j}_3(\vec{r}) = \frac{I_0}{\rho} \hat{e}_z \delta(\rho - R) \delta(\varphi + \varphi_0) \Theta(z)$$



gesucht: $\vec{B}(\vec{r})$ bei $\vec{r} = \vec{0}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r}) + \vec{B}_3(\vec{r}),$$

f, die liegen ja nicht aufeinander, somit gilt das Superpositionsprinzip nicht

~~$\vec{B}_1(\vec{r})$ und $\vec{B}_3(\vec{r})$ heben sich wegen unterschiedlichen Vorzeichen auf.~~

-11p

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left(\vec{j}_2(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') \right) \frac{1}{(r^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -\rho' \cos \varphi \\ -\rho' \sin \varphi \\ -z' \end{pmatrix} = -\vec{r}' = -\rho' \hat{e}_\rho - z' \hat{e}_z,$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho'^2 + z'^2}$$

$$\vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\vec{j}_2(\vec{r}') \times (-\vec{r}')}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}^3} \rho' d\rho' dz' d\varphi$$

$$\vec{j}_2(\vec{r}') \times (-\vec{r}') = I_0 \hat{e}_\varphi \delta(\rho' - R) \Theta(\varphi - \varphi_0) \Theta(2\pi - \varphi_0 - \varphi) \delta(z') \times (-\rho' \hat{e}_\rho - z' \hat{e}_z)$$

$$= I_0 \delta(\rho' - R) \Theta(\varphi - \varphi_0) \Theta(2\pi - \varphi_0 - \varphi) \delta(z') (\rho' \hat{e}_z - z' \hat{e}_\rho)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \frac{I_0 \mu_0}{4\pi R^2} \int_{\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} d\varphi \hat{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R^2} \left[(2\pi - \varphi_0) - \varphi_0 \right] \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R} (2\pi - 2\varphi_0) \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \left(1 - \frac{\varphi_0}{\pi} \right) \hat{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}) \xrightarrow{\varphi_0 \rightarrow 0} \frac{\mu_0 I_0}{2R} \hat{e}_z$$

Da du den anderen Teil nicht
berechnet hast, initialisierst du diese
Teilaufgabe -2P

$$\text{vgl. a): } B(z) \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_z$$

$$B(0) \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{R^2}{R^3} \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I_0}{2R} \hat{e}_z$$

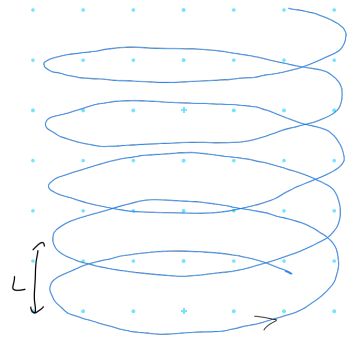
=> Für $\varphi_0 \rightarrow 0$ entspricht das Ergebnis dem der idealen
Leiterschleife aus a)

$$c) \vec{r}'(\varphi) = R \hat{e}_\rho + \frac{L\varphi}{2\pi} \hat{e}_z$$

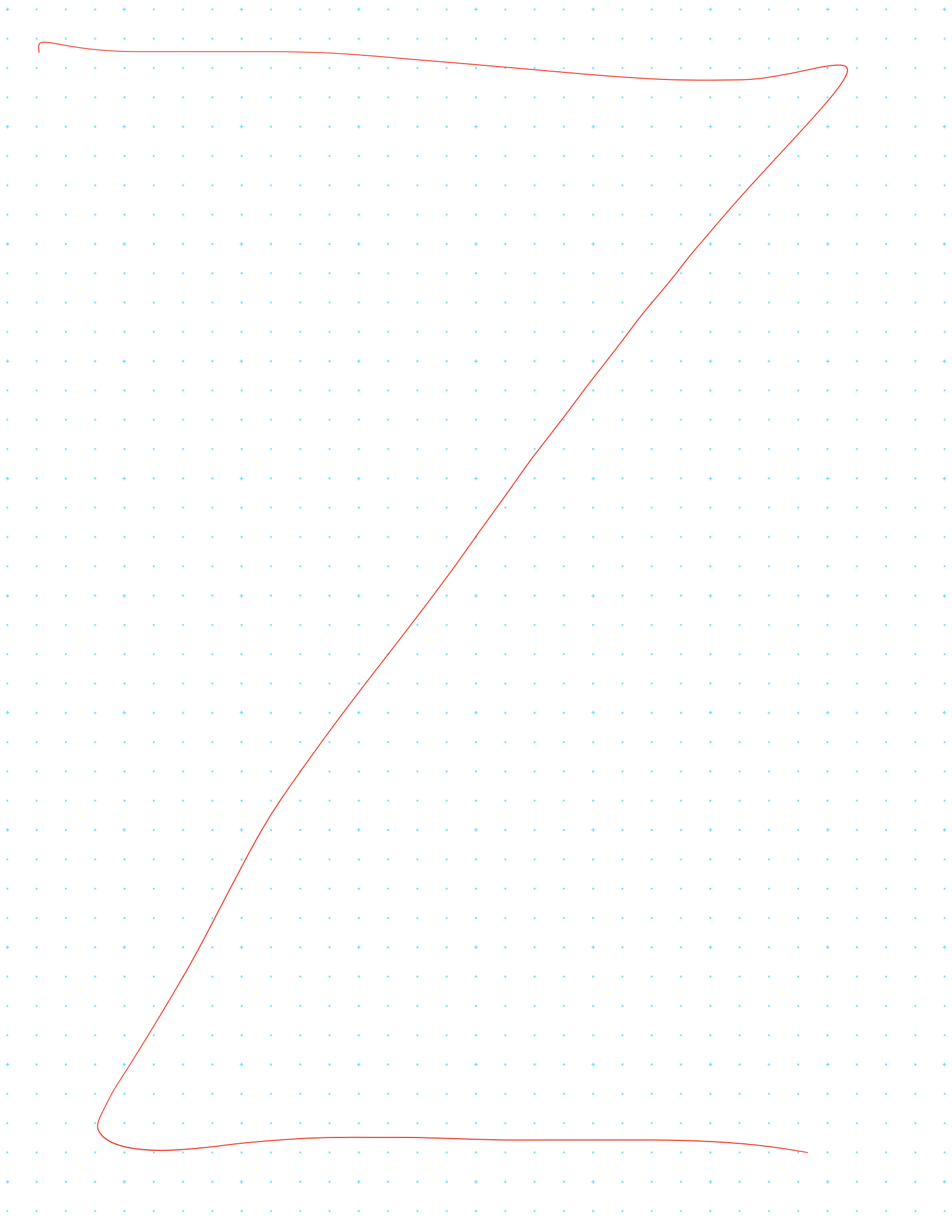
$$\vec{j}(\vec{r}) = \delta(\rho - R)$$

-15P

d) fehlt +0P



11P



②

$$\oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_F$$

a) $\vec{j}(\vec{r}) = j_0 \hat{e}_z \Theta(R-\rho)$

Integration über eine Kreislinie mit Radius ρ . Nach der rechten-Hand-Regel ist $\vec{B} = B \hat{e}_\varphi$.

$$\oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{B} = \int_0^{2\pi} \rho d\varphi \hat{e}_\varphi \cdot B(\rho) \hat{e}_\varphi = 2\pi \rho B(\rho)$$

Integration über eine Kreisfläche mit Radius ρ

$$\int_F d\vec{f} \cdot \mu_0 \vec{j} = \mu_0 j_0 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho' d\rho' d\varphi \hat{e}_z \cdot \Theta(R-\rho') \hat{e}_z = \mu_0 j_0 \int_0^\rho \rho' d\rho' \Theta(R-\rho') \int_0^{2\pi} d\varphi = \begin{cases} \mu_0 j_0 \pi \rho^2, & \rho \leq R \\ 0, & \rho > R \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\pi \rho B(\rho) = \begin{cases} \mu_0 j_0 \pi \rho^2, & \rho \leq R \\ \mu_0 j_0 \pi R^2, & \rho > R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_0}{2} \rho, & \rho \leq R \\ \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2\rho}, & \rho > R \end{cases}$$

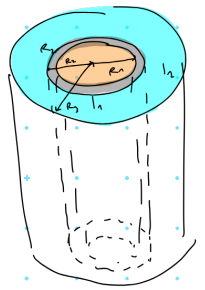
Gesucht ist $\vec{B}$ und bitte solche Größen immer mit Strom & nicht mit Stromdichten angeben

$$j_0 = \frac{I_0}{\pi R^2}$$

Skizze siehe Anhang!

$$b) \quad \oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_F$$

$$2\pi \rho B(\rho) = \mu_0 \cdot \begin{cases} l_1 & 0 \leq \rho \leq R_1 \\ 0 & R_1 < \rho < R_2 \\ \frac{l_2}{\pi \rho^2} & R_2 \leq \rho \leq R_3 \\ 0 & \rho > R_3 \end{cases}$$



$$\vec{j}(\rho) = \left(\frac{l_1}{\rho} \underbrace{\Theta(R_2 - \rho) \Theta(\rho)}_{\Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq R_2} + \frac{l_2}{\rho} \underbrace{\Theta(R_3 - \rho) \Theta(\rho - R_2)}_{\Leftrightarrow R_2 \leq \rho \leq R_3} \right) \hat{e}_z$$

$$2\pi \rho B(\rho) = \mu_0 \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}(\rho)$$

$$2\pi \rho B(\rho) = \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \underbrace{\rho d\varphi d\rho}_{d\vec{f}} \hat{e}_z \left(\frac{l_1}{\pi R_1^2} \Theta(R_2 - \rho) \Theta(\rho) + \frac{l_2}{\pi R_2^2} \Theta(R_3 - \rho) \Theta(\rho - R_2) \right) \hat{e}_z$$

$$= \begin{cases} l_1 \frac{\rho^2}{R_1^2}, & 0 \leq \rho \leq R_1 \\ l_1, & R_1 \leq \rho \leq R_2 \\ l_1 + l_2 \frac{\rho^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}, & R_2 \leq \rho \leq R_3 \\ l_1 + l_2, & R_3 \leq \rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \underbrace{\vec{e}_z}_{-2\rho} \begin{cases} \frac{l_1}{R_1^2} \rho, & 0 \leq \rho \leq R_1 \\ \frac{l_1}{\rho}, & R_1 \leq \rho \leq R_2 \\ \frac{1}{\rho} \left(l_1 + l_2 \frac{\rho^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right), & R_2 \leq \rho \leq R_3 \\ \frac{1}{\rho} (l_1 + l_2), & R_3 \leq \rho \end{cases}$$

Spezialfall $l_1 = -l_2 = I_0$:

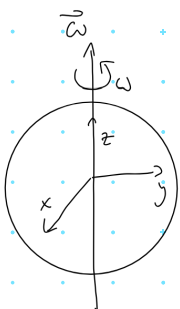
$$B(p) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \begin{cases} \frac{1}{R_1^2} p, & 0 \leq p \leq R_1 \\ \frac{1}{p}, & R_1 \leq p \leq R_2 \\ \frac{1}{p} \left(1 - \frac{p^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{R_3^2 - R_2^2 - p^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right), & R_2 \leq p \leq R_3 \\ \frac{1}{p} (-I_0 + I_0) = 0, & R_3 \leq p \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Die magnetische Flussdichte ist im Fall $I_1 = -I_2$ außerhalb des Kabels ($p \geq R_3$) Null: ✓

Skizze siehe Anhang!

21P

③



a) Die Sphäre wird in Kugelkoordinaten beschrieben durch:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} R(\cos \vartheta \dot{\vartheta} \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi}) \\ R(\cos \vartheta \dot{\vartheta} \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi}) \\ -R \sin \vartheta \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

Durch die Rotation der Sphäre um die z-Achse gibt es keine Vertikalbewegung $\Rightarrow \dot{\vartheta} = 0$

$$= \dot{\vec{r}} = R \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta (-\sin \varphi) \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\dot{\varphi} = \omega}{=} R \omega \sin \vartheta \hat{e}_\varphi$$

Der Strom wird durch die durch die Rotation bewegte Oberflächenladung erzeugt: ✓

$\hat{=}$ Oberflächenladung nur bei $r = R$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma_0 R \omega \sin \vartheta \hat{e}_\varphi \delta(r - R)$$

$$b) \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \right) \checkmark$$

$$\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) = R \hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi \sigma_0 R \omega \sin\vartheta \delta(r-R)$$

$$= -R^2 \sigma_0 \omega \sin\vartheta \delta(r-R) \hat{e}_\vartheta \quad (\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi = -\hat{e}_\vartheta)$$

$$\Rightarrow \vec{m} = -\frac{1}{2} R^2 \sigma_0 \omega \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin^2\vartheta \delta(r-R) \hat{e}_\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr$$

$$= -\frac{1}{2} R^4 \sigma_0 \omega \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2\vartheta \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta \, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2} R^4 \sigma_0 \omega \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta \\ -\sin^3\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta \, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2} R^4 \sigma_0 \omega \int_0^\pi \left[\begin{pmatrix} \sin\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta \\ -\cos\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta \\ -\sin^3\vartheta \end{pmatrix} \right]_0^{2\pi} d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{2} R^4 \sigma_0 \omega \int_0^\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin^3\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta \cdot 2\pi \checkmark$$

$$= -\frac{\pi}{4} R^4 \sigma_0 \omega \int_0^\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\sin(\vartheta) + \sin(3\vartheta) \end{pmatrix} d\vartheta$$

$$= -\frac{\pi}{4} R^4 \sigma_0 \omega \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\cos(\vartheta) - \frac{1}{3}\cos(3\vartheta) \end{pmatrix} \right]_0^\pi \checkmark$$

$$= -\frac{\pi}{4} R^4 \sigma_0 \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\cos(\pi) - 3\cos(0) - \frac{1}{3}\cos(\pi) + \frac{1}{3}\cos(0) \end{pmatrix} \checkmark$$

$$= \frac{\pi}{4} R^4 \sigma_0 \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 - 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{\pi}{4} R^4 \sigma_0 \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^4 \sigma_0 \vec{\omega} \quad \checkmark$$

$$c) \quad \vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad \checkmark = \frac{\mu_0}{r^3} \left(\frac{1}{3} R^4 \sigma_0 \omega \hat{e}_z \times r \hat{e}_r \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{3r^2} R^4 \sigma_0 \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{3r^2} R^4 \sigma_0 \omega \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mu_0}{3r^2} R^4 \sigma_0 \omega \sin\vartheta \hat{e}_\varphi \quad \checkmark$$

$$\vec{B}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin\vartheta} \left[\partial_\vartheta \left(\frac{\mu_0}{3r^2} R^4 \sigma_0 \omega \sin^2\vartheta \right) \right] \hat{e}_r + \left[-\frac{1}{r} \partial_r \left(\frac{\mu_0}{3r} R^4 \sigma_0 \omega \sin\vartheta \right) \right] \hat{e}_\vartheta$$

$$= \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\mu_0}{3r^2} R^4 \sigma_0 \omega 2 \sin\vartheta \cos\vartheta \hat{e}_r + \frac{\mu_0}{3r^3} R^4 \sigma_0 \omega \sin\vartheta \hat{e}_\vartheta$$

$$= \frac{\mu_0}{3r^3} R^4 \sigma_0 \omega (2 \cos\vartheta \hat{e}_r + \sin\vartheta \hat{e}_\vartheta) \quad \checkmark \quad \text{und für } \vartheta = 0? \\ -2,5 \mu$$

$$d) \quad \vec{A}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R^3 r_{<}}{3} \frac{r_{>}}{r_{>}^2} \sin\vartheta \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin\vartheta} \left[\partial_\vartheta \left(\frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R^3}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \sin^2\vartheta \right) \right] \hat{e}_r + \left[-\frac{1}{r} \partial_r \left(r \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R^3}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \sin\vartheta \right) \right] \hat{e}_\vartheta$$

Fallunterscheidung:

$$\underline{r > R}: \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\partial_{\vartheta} \left(\frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R^4}{3} \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \right) \right] \hat{e}_r + \left[-\frac{1}{r} \partial_r \left(\frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R^4}{3} \frac{1}{r} \sin \vartheta \right) \right] \hat{e}_{\vartheta}$$

$$= \frac{2 \mu_0 \omega \sigma_0 R^4}{3 r^3} \cos \vartheta \hat{e}_r + \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R^4}{3 r^3} \sin \vartheta \hat{e}_{\vartheta} \quad \checkmark$$

$$\underline{r < R}: \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\partial_{\vartheta} \left(\frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R^3}{3} \frac{r}{R^2} \sin^2 \vartheta \right) \right] \hat{e}_r + \left[-\frac{1}{r} \partial_r \left(\frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R^3}{3} \frac{r^2}{R^2} \sin \vartheta \right) \right] \hat{e}_{\vartheta}$$

$$= \frac{2 \mu_0 \omega \sigma_0 R}{3} \cos \vartheta \hat{e}_r - \left[-2 \frac{\mu_0 \omega \sigma_0 R}{3} \sin \vartheta \right] \hat{e}_{\vartheta} = \frac{2 \mu_0 \omega \sigma_0 R}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2 \mu_0 \omega \sigma_0 R^4}{3 r^3} (\cos \vartheta \hat{e}_r + \frac{1}{2} \sin \vartheta \hat{e}_{\vartheta}), & r > R \\ \frac{2 \mu_0 \omega \sigma_0 R}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & r < R \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\vec{B}^{(n)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{3 r^3} R^4 \sigma_0 \omega (2 \cos \vartheta \hat{e}_r + \sin \vartheta \hat{e}_{\vartheta}), \text{ was dem exakten}$$

B-Feld für $r > R$ entspricht. $\checkmark$ und für $r=0$?

-2p

/ 30,5p

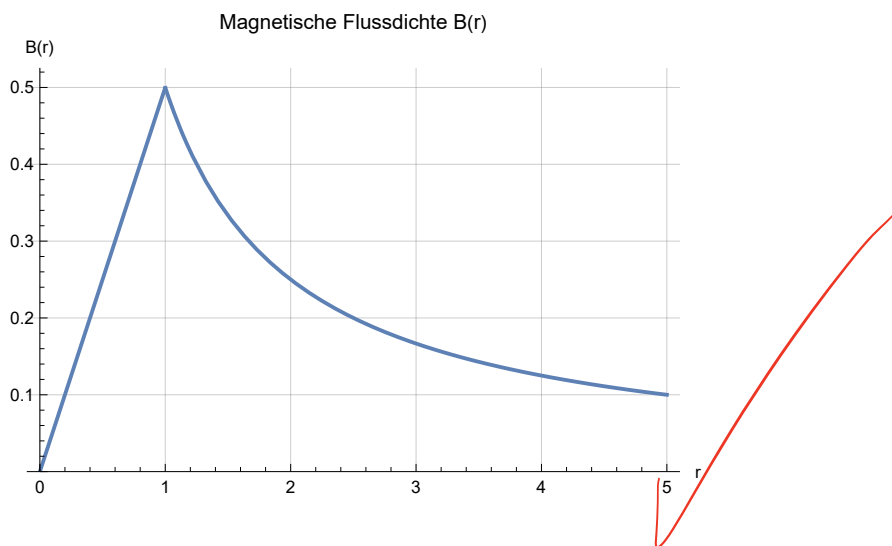
Ges 62,5p
100p
Kevin Schmidt

2a)

```
In[ ]:= mu0 = 1;  
R = 1;  
j0 = 1;
```

```
B[r_] := Piecewise[{{mu0 * j0 * r / 2, r <= R}, {mu0 * j0 * R^2 / (2 * r), r > R}}]  
Plot[B[r], {r, 0, 5}, PlotRange -> {0, All}, PlotLabel -> "Magnetische Flussdichte B(r)",  
AxesLabel -> {"r", "B(r)"}, PlotStyle -> Thick, GridLines -> Automatic]
```

Out[]:=



2b)

```

In[ ]:= R1 = 1;
        R2 = 2;
        R3 = 3;
        I0 = 1;

B[r_] := Piecewise[{{mu0 * I0 * r / (2 * Pi * R1^2), r <= R1}, {mu0 * I0 / (2 * Pi * r), R1 <= r <= R2},
                    {mu0 * I0 * (R3^2 - r^2) / (2 * Pi * r * (R3^2 - R2^2)), R2 <= r <= R3}, {0, r >= R3}}]
Plot[B[r], {r, 0, 5}, PlotRange -> {0, All},
     PlotLabel -> "Magnetische Flussdichte B(r) für den Fall I1=-I2",
     AxesLabel -> {"r", "B(r)"}, PlotStyle -> Thick, GridLines -> Automatic]

```

Out[]:=

