Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 7

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353

Abgabe: ***Montag***, *09.12.2024 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: ***Mittwoch***, *11.12.2024 in den Tutorien*

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_07_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

1. Kraft und Drehmoment auf ein magnetisches Moment im B-Feld

7 + 8 = 15 Punkte

Die magnetische Kraft $\boldsymbol{F}$ und das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ auf eine räumlich begrenzte Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ sind

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \int d^3r\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \ , \\ \boldsymbol{M} &= \int d^3r\, \boldsymbol{r} \times \big(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\big) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Folgend nehmen wir an, dass die Stromdichte auf einen Bereich nahe $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ konzentriert sei. Variiert die Flussdichte $|\boldsymbol{B}|$ nur gering in dem Bereich mit endlicher Stromdichte $|\boldsymbol{j}|$, kann man $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ im Integranden in eine Taylor-Reihe um $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ entwickeln. Das Resultat in der niedrigsten nicht-verschwindenden Ordnung kann mit Hilfe des Dipolmoments $\boldsymbol{m}$ ausgedrückt werden.

a) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{F} \approx \nabla \left(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right) \big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}} \ . \tag{2}$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{M} \approx \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}) \ . \tag{3}$$

2. Die rotierende Sphäre, Teil 2

5 + 10 + 5 + 10 + 10 = 40 Punkte + 5 Bonuspunkte

Auf Blatt 6 in Aufgabe 3 haben Sie die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$ einer homogen geladenen, rotierenden Sphäre berechnet. In Kugelkoordinaten ergab sich folgender Ausdruck:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\omega\sigma R\hat{e}_z & \text{für } r < R \\ \mu_0\omega\sigma R\left(\frac{R}{r}\right)^3(\cos\vartheta\hat{e}_r - \frac{1}{3}\hat{e}_z) & \text{für } r > R \ . \end{cases} \tag{4}$$

Dabei ist R der Radius der Sphäre, σ die homogene Oberflächenladungsdichte und $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{e}_z$ die Winkelgeschwindigkeit.

a) Verifizieren Sie, dass dieses B-Feld quellenfrei ist, also dass $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

b) In der Vorlesung, Kapitel 4.6, haben Sie die Stetigkeits- und Sprungbedingung für die Flussdichte an Grenzflächen kennengelernt. Wie lauten die beiden Bedingungen für das hier betrachtete System? Überprüfen Sie explizit, ob das B-Feld in Gleichung (4) diese Bedingungen erfüllt.

c) Wie lautet das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ der homogen geladenen Sphäre?

d) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ und zeigen Sie, dass $\nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0$. Diskutieren Sie die Bedeutung für das Poynting'sche Theorem.

e) 5 Bonuspunkte: Skizzieren Sie qualitativ das $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$-Feld, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$-Feld und das Poynting-Vektor-Feld $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$. Sie können auch ein Computerprogramm wie Mathematica zur Hilfe nehmen oder Ihre Skizze gezielt einschränken, z. B. auf die x-z-Ebene und nur nicht-verschwindende Feldkomponenten. Ob Sie in 2d oder 3d zeichnen wollen, bleibt Ihnen überlassen. Ziel ist es, ein qualitatives Bild der Feld-Konfigurationen zu erstellen, was dem Verständnis dienen soll.

f) Nehmen Sie nun an, eine weitere homogen geladene, rotierende Sphäre befinde sich in großer Entfernung $r \gg R$, sodass sie als Punktladung q_2 und punktförmiges, magnetisches Moment $\boldsymbol{m}_2$ beschrieben werden kann. Analog wird die erste Sphäre mit q_1 und $\boldsymbol{m}_1$ beschrieben. Berechnen Sie die magnetische Kraft und das Drehmoment, welches die erste Sphäre auf die zweite Sphäre auswirkt unter der Annahme, dass $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = m\hat{e}_z$. Nutzen Sie ein Computerprogramm wie Mathematica um die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ und das Drehmoment $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ auf $\boldsymbol{m}_2$ in der x-z-Ebene zu skizzieren, wobei sich $\boldsymbol{m}_1$ im Ursprung und $\boldsymbol{m}_2$ and Position $\boldsymbol{r}$ befinde.

3. Der Poynting-Vektor

5 + 7 + 8 = 20 Punkte

In dieser Aufgabe werden Sie den Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$ berechnen und ihn dazu benutzen, Informationen über das physikalische System herzuleiten.
Betrachten Sie dazu einen Draht mit dem Radius R in einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$, siehe Abbildung. Durch das elektrische Feld wird die Stromdichte $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ innerhalb des Drahtes induziert. Die Proportionalitätskonstante σ ist *hier* die elektrische Leitfähigkeit des Materials. Der Draht liegt entlang der z-Achse und das elektrische Feld sei gegeben als $\boldsymbol{E} = E_0\hat{e}_z$. Der Einfachheit halber können Sie annehmen, dass der Draht unendlich lang ist.

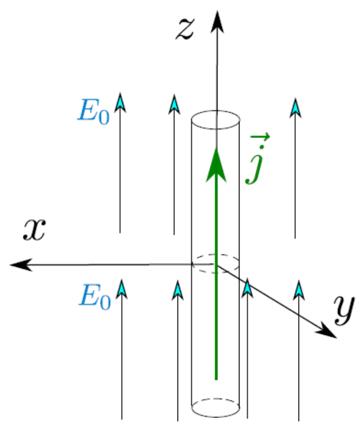

Abbildung: Ein Draht in einem E-Feld wird von einem Strom durchflossen.

a) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$, die innerhalb und außerhalb des Drahtes erzeugt wird.

b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor innerhalb und außerhalb des Drahtes.

c) Berechnen Sie $\nabla \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}$. Diskutieren Sie die physikalische Interpretation des Ergebnisses.

4. Spulen und Induktivität

5 + 10 + 10 = 25 Punkte

In dieser Aufgabe lernen Sie das Konzept der wechselseitigen Induktivität kennen. Diese beschreibt den magnetischen Fluss, der von einem elektrischen Bauteil, meist Spulen, in einem anderen induziert wird. Dazu betrachten wir eine Leiterschleife S_1 mit dem Strom I_1, welche die Flussdichte $\boldsymbol{B}_1$ erzeugt.

a) Zeigen Sie, dass der magnetische Fluss Φ_2^m durch eine zweite Leiterschleife S_2 proportional zum Strom I_1 in der ersten Leiterschleife ist.

Die Proportionalitätskonstante zwischen Φ_2^m und I_1 wird Gegeninduktivität M_{21} genannt:

$$\Phi_2^m = \int_{S_2} \boldsymbol{B}_1 \cdot d\boldsymbol{S}_2 \equiv M_{21} I_1, \tag{5}$$

wobei S_2 die Oberfläche der Leiterschleife mit Rand ∂S_2 bezeichnet.

b) Leiten Sie die folgende Gleichung, auch als Neumann-Kurvenintegral bekannt, her:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{\boldsymbol{dl}_1 \cdot \boldsymbol{dl}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}. \tag{6}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\boldsymbol{B}_1 = \nabla \times \boldsymbol{A}_1$.

Diese Gleichung verrät uns zwei Dinge über die wechselseitige Induktivität: Zum einen ist die Induktivität eine Eigenschaft, die allein von der Geometrie des Problems abhängt, und zum anderen ist sie symmetrisch: $M_{12} = M_{21}$. Diese zweite Eigenschaft impliziert, dass der Fluss, der von der ersten Leiterschleife in der zweiten induziert wird, der gleiche ist wie der Fluss, den der gleiche Strom durch die zweite Leiterschleife in der ersten induzieren würde.

c) Betrachten Sie nun zwei konzentrische Spulen. Die innere, kürzere Spule hat die Länge h_1, den Radius r_1 und die Windungsdichte n_1. Die äußere Spule ist sehr viel größer als die innere und hat die Länge $h_2 \gg h_1$, den Radius $r_2 \gg r_1$ und die Windungsdichte n_2. Sie können somit annehmen, dass die Flussdichte $\boldsymbol{B}_2$ der zweiten Spule am Ort der ersten Spule konstant ist.

Durch die innere Spule fließe nun der Strom I und erzeuge das Magnetfeld $\boldsymbol{B}_1$. Was ist der magnetische Fluss durch die Leiterschleifen der äußeren Spule? Berechnen Sie die wechselseitige Induktivität M_{12}. Sie brauchen dafür *nicht* $\boldsymbol{B}_1$ berechnen.