

①

$$\vec{F} = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}), \quad \vec{M} = \int d^3r \vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})), \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

$$\frac{83}{100}$$



$$a) \vec{F} \approx \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{(\vec{B}(0) + r_i \partial_i \vec{B}(0) + \dots)}_{\text{Taylorentw. von } \vec{B} \text{ in } 0}$$

Nullte Ordnung verschwindet

$$F = \int d^3r \epsilon_{kij} j_k(\vec{r}) r_i \partial_i B_j(0) \quad \epsilon_{kij} \frac{1}{2} (j_k(\vec{r}) r_i - j_i(\vec{r}) r_k) \partial_i B_j(0)$$

$$= \int d^3r \epsilon_{kij} \frac{1}{2} \epsilon_{ilm} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_m \partial_i B_j(0) \quad \left| \epsilon_{kij} \epsilon_{ilm} = \delta_{ki} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ji} \right.$$

$$= \int d^3r (\delta_{ki} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ji}) \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_m \partial_i B_j(0)$$

$$= \int d^3r \left(\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_j \partial_k B_j(0) - \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_k \partial_j B_j(0) \right)$$

$$= \int d^3r \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_j \partial_k B_j(0)$$

$$= \vec{0} \cdot \vec{B}(0) = 0 \quad \checkmark$$

$$= m_j \partial_k B_j(0) = \partial_k (\vec{m} \cdot \vec{B}(0))$$

$$\Rightarrow \vec{F} \approx \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r})) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} \quad \checkmark$$

$$\alpha: \frac{4}{7}$$

$$b) \vec{M} \approx \int d^3r (\vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(0))) \quad \checkmark$$

$$= \int d^3r (\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(0) - \vec{B}(0) \cdot (\vec{r} \times \vec{j}))$$

$$= \int d^3r (\hat{e}_i j_i r_k B_k(0)) = B_k(0) \int d^3r (r_k j_i \hat{e}_i)$$

$$= B_k(0) \hat{e}_i \int d^3r (r_k j_i - \frac{1}{2} (r_k j_i + r_i j_k)) \quad \checkmark$$

$$= B_k(0) \hat{e}_i \frac{1}{2} \int d^3r (r_k j_i - r_i j_k) = B_k(0) \hat{e}_i \epsilon_{kij} \int d^3r \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j})_l$$

$$= \int d^3r \left(\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{j}) \right) \times \vec{B}(0) = \vec{m} \times \vec{B}(0) \quad \checkmark$$

$$(-1)$$

$$\frac{7}{8}$$

Nullte Ordnung verschwindet nicht

$BAC - CAB$ - Identität

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \int d^3r (\vec{r} \cdot \vec{j}) = 0$$

$$\frac{17}{15}$$

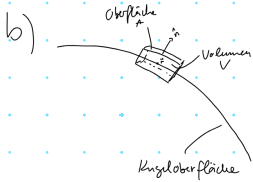
$$\textcircled{2} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma R \hat{e}_z, & r < R \\ \mu_0 \omega \sigma R \left(\frac{R}{r}\right)^3 (\cos\vartheta \hat{e}_r - \frac{1}{3} \hat{e}_z), & r > R \end{cases}$$

$$a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma R \hat{e}_z = 0 \checkmark, & r < R \\ \vec{\nabla} \cdot \mu_0 \omega \sigma R \left(\frac{R}{r}\right)^3 (\cos\vartheta \hat{e}_r - \frac{1}{3} \hat{e}_z), & r > R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mu_0 \omega \sigma R \left(\frac{R}{r}\right)^3 (\cos\vartheta \hat{e}_r - \frac{1}{3} \hat{e}_z) &= \vec{\nabla} \cdot \mu_0 \omega \sigma R \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{2}{3} \cos\vartheta \hat{e}_r + \frac{1}{3} \sin\vartheta \hat{e}_\vartheta \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \mu_0 \omega \sigma R \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cos\vartheta) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\vartheta (\sin\vartheta \mu_0 \omega \sigma R \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{1}{3} \sin\vartheta) \\ &= \frac{1}{r^2} \left(- \frac{\mu_0 \omega \sigma R^4}{r^2} \cdot \frac{2}{3} \cos\vartheta \right) + \frac{1}{r \sin\vartheta} \left(\mu_0 \omega \sigma \frac{R^4}{r^3} 2 \sin\vartheta \cos\vartheta \right) \\ &= \frac{-2 \mu_0 \omega \sigma R^4 \cos\vartheta}{3 r^4} + \frac{2 \mu_0 \omega \sigma R^4 \cos\vartheta}{r^4} = 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

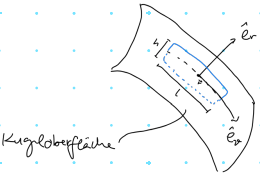
q: ~~S~~



Stetigkeitsbedingungen von $\vec{B}$ an Grenzflächen:

1. Die Normalkomponente (in diesem Fall radial von der Kugeloberfläche weg) ist stetig

$$\Leftrightarrow \underbrace{B_1 \hat{e}_r = B_2 \hat{e}_r}_{= B_\perp}$$



2. Die Tangentialkomponente (θ - und φ -Komponenten) ist sprunghaft

$$\vec{v} = v \hat{e}_\theta + v \hat{e}_\varphi, v^2 + v^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{B_2 (\hat{e}_\theta + \hat{e}_\varphi)}_{\vec{t}} = B_1 (\hat{e}_\theta + \hat{e}_\varphi) = \mu_0 (\hat{e}_\theta + \hat{e}_\varphi) (\sigma \omega R \sin \theta \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r) = \mu_0 \sigma \omega R \sin \theta$$

Normalkomponente: $\vec{B}_1^+ \Big|_{r=R} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \hat{e}_z \cdot \hat{e}_r = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \cos \theta$

$$\vec{B}_2^+ \Big|_{r=R} = \mu_0 \omega R (\cos \theta \hat{e}_r - \frac{1}{3} \hat{e}_z) \hat{e}_r = \mu_0 \omega R (\cos \theta - \frac{1}{3} \cos \theta) = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \cos \theta$$

$\Rightarrow$ Die Normalkomponente ist stetig. ✓

Tangentialkomponente: $\vec{B}_1^+ \Big|_{r=R} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \hat{e}_z (\hat{e}_\theta + \hat{e}_\varphi) = -\frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \sin \theta$

$$\vec{B}_2^+ \Big|_{r=R} = \mu_0 \omega R (\cos \theta \hat{e}_r - \frac{1}{3} \hat{e}_z) (\hat{e}_\theta + \hat{e}_\varphi)$$

$$= \mu_0 \omega R \frac{1}{3} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \mu_0 \omega R \frac{1}{3} \sin \theta + \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \sin \theta = \mu_0 \omega R \sin \theta$$

$\Rightarrow$ Die Tangentialkomponente ist sprunghaft um $\mu_0 \omega R \sin \theta$. ✓✓

b. 8/10

c)

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \sigma \delta(r-R) dV$$

Ans. Symmetriegründen
hat das E-Feld nur
eine radiale Komponente

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E \hat{e}_r r^2 \sin\theta \hat{e}_r d\theta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \sigma \delta(r-R) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$4\pi E(r) r^2 = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi R^2 \sigma, & r \geq R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \sigma \hat{e}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{e}_r, & r \geq R \end{cases}$$

Gesamtladung auf der Kugel mit $Q = \sigma \cdot A = \sigma \cdot 4\pi R^2$

$C: \frac{S}{S}$

d)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}$$

$$\begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \sigma \hat{e}_r \times \mu_0 \omega R \left(\frac{R}{r}\right)^3 (\cos\theta \hat{e}_r - \frac{1}{3} \hat{e}_z), & r \geq R \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{3} \frac{R^2}{r^2} \sigma \cdot \mu_0 \omega R \frac{R^3}{r^3} \hat{e}_r \times \hat{e}_z = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{R^6}{r^5} \sigma^2 \omega \sin\theta \hat{e}_\varphi, r \geq R$$

NR:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\theta \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{R^6}{r^5} \sigma^2 \omega \hat{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi \left(\frac{1}{3\epsilon_0} \frac{R^6}{r^5} \sigma^2 \omega \right) = 0$$

Poynting'sches Theorem: $\partial_t w_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Energiedichte des
elektromagnetischen
Felds

Umwandlung
Feldenergie in
Joulesche Wärme

Im gesamten System ist die Energiedichte w_m konstant ($2 + w_m = 0$)

Das System verrichtet also keine mechanische Arbeit. ✓

$$Cl: \frac{10}{20}$$

$$\boxed{2: \frac{28}{40}}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad a) \int_F d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \oint_{\partial F} d\vec{s} \vec{B} = \int_F d\vec{f} \mu_0 \vec{j} = \int_F d\vec{f} \mu_0 \sigma \vec{E} \Theta(R-\rho) \\
 \int_0^{2\pi} \underbrace{B \hat{e}_\varphi}_{\substack{B=B\hat{e}_\varphi \\ \text{aus Symmetrie} \\ \text{gründen}}} \underbrace{\hat{e}_\varphi \rho d\varphi}_{=d\vec{s}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{\Theta(R-\rho)}_{\vec{E}} \underbrace{\mu_0 \sigma \vec{E}_0 \hat{e}_z}_{d\vec{f}} \hat{e}_\varphi \rho d\varphi d\rho = \pi \mu_0 \sigma E_0 \begin{cases} \rho^2, & \rho \leq R \\ R^2, & \rho > R \end{cases} \\
 2\pi \rho B &= \frac{\pi}{2} \mu_0 \sigma E_0 \begin{cases} \rho^2, & \rho \leq R \\ R^2, & \rho > R \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{2} \hat{e}_\varphi \mu_0 \sigma E_0 \begin{cases} \rho, & \rho \leq R \\ \frac{R^2}{\rho}, & \rho > R \end{cases} \quad \checkmark \quad a: \frac{5}{5}$$

$$b) \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} (E_0 \hat{e}_z \times \hat{e}_\varphi \frac{1}{2} \mu_0 \sigma E_0 \begin{cases} \rho, & \rho \leq R \\ \frac{R^2}{\rho}, & \rho > R \end{cases})$$

$$\text{NR: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\hat{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{S} = -\frac{E_0^2 \sigma}{2} \begin{cases} \rho, & \rho \leq R \\ \frac{R^2}{\rho}, & \rho > R \end{cases} \hat{e}_\rho \quad (\vec{S} \text{ zeigt in den Draht hinein})$$

$$\begin{aligned}
 c) \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E}}_{\substack{= -\partial_t W_{em} \\ \text{(Poynting'sches} \\ \text{Theorem)}}} &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left(-\frac{E_0^2 \sigma}{2} \begin{cases} \rho^2 + \sigma E_0^2, & \rho \leq R \\ R^2, & \rho > R \end{cases} \right) \\
 &= \begin{cases} -E_0^2 \sigma + \sigma E_0^2 = 0 & \rho \leq R \\ 0 & \rho > R \end{cases} \quad \text{☺}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_t W_{em} = 0$$

Die Änderung der Energiedichte der elektromagnetischen Felder nach der Zeit ($\partial_t w_{em}$) ist innerhalb und außerhalb des Drahtes Null ($\Leftrightarrow w_{em} = \text{const.}$) ✓

Für $\rho \leq R$ kompensiert der eingehende Energiestrom $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$ die Abnahme der Feldenergie durch Arbeitsverrichtung $\vec{j} \cdot \vec{E}$.

Für $\rho > R$ sind beide Komponenten Null. ✓

$$\frac{7}{8} \quad \frac{19}{20}$$

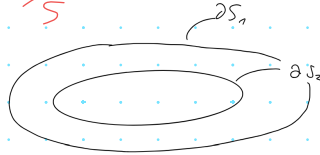
(4) a) Allgemein ist $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$. Wir nehmen an, dass der Draht

keine Ausdehnung hat $\Rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial S_1} I_1 d\vec{s} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ $B_1 \propto I_1$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{f} \Rightarrow \Phi_2 \propto I_1 \quad \checkmark$$

a: $\frac{5}{5}$

$$b) \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$



$$M_{21} = \frac{1}{I_1} \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{I_1} \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{I_1} \oint_{\partial S_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

$$= \frac{1}{I_1} \oint_{\partial S_2} d\vec{l}_2 \cdot \oint_{\partial S_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \checkmark$$

b: $\frac{10}{10}$

c) $M_{12} = M_{21}$, $\vec{B}_2 \propto \text{const.}$ in der inneren Spule $\Leftrightarrow \vec{B}_2 = B_2 \hat{e}_z$

Die Spule wird als Summe aus $N = n_1 \cdot h_1$ Leiterschleifen (Ringe) gemittelt mit:

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = B_2 h_1 n_1 \int_{S_1} dS_1 = n_1 \pi r_1^2 B_2 h_1$$

$$\text{mit } \vec{B}_2(z)|_{z=0} \cdot \hat{e}_z = \frac{2\pi r_2 n_2^2}{\sqrt{1 + (2\pi r_2)^2 n_2^2}} \quad (\text{siehe Blatt 6, 1c})$$

c: $\frac{10}{10}$

$$\Rightarrow M_{12} = \frac{\Phi_1}{I} = \frac{n_1 r_1^2 \pi \mu_0 h_1}{\sqrt{1 + (2\pi r_2)^2 n_2^2}} \frac{2\pi r_2^2 n_2^2}{\sqrt{1 + (2\pi r_2)^2 n_2^2}}$$

$$= \mu_0 n_2 h_1 \pi r_1 r_2^2$$

$$\frac{4.25}{2.5}$$