Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 9

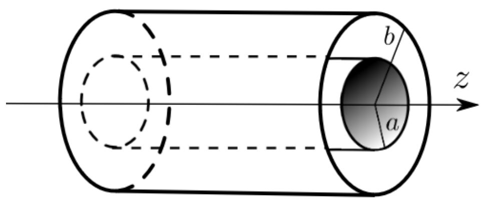
Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353
Abgabe: ***Montag**, 23.12.2024 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: ***Mittwoch**, 08.01.2025 in den Tutorien*

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_09_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

1. Der Wellenleiter 2: Koaxial-Leiter

5 + 5 + 5 + 10 = 25 Punkte



Sie haben bereits das Konzept des Wellenleiters und der transversalen elektromagnetischen Wellen (*TEM-Wellen*) kennengelernt, siehe Blatt 8 Aufgabe 2 oder Kapitel 5.7.2. im Skript. Der Fokus lag dabei bislang auf einem Wellenleiter mit rechteckigem Querschnitt und Sie haben gezeigt, das TEM-Wellen in dieser Geometrie nicht existieren können. Für Wellenleiter, deren Querschnitt nicht einfach zusammenhängend ist, können TEM-Wellen mit $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{k}$ jedoch sehr wohl existieren. In dieser Aufgabe berechnen Sie den Energiefluss via TEM-Wellen in einem solchen Wellenleiter.
Betrachten Sie ein Koaxialkabel, siehe Abbildung, auch bekannt aus Blatt 6 Aufgabe 2. Das Kabel besteht aus zwei koaxial angeordneten Leitern: Einem leitenden Draht im Zentrum mit Radius a und, mit Radius b, einem weiteren Leiter in Form einer leitenden Zylinderhülle. Das Koaxialkabel wird als unendlich lang angenommen.

a) Zeigen Sie, dass die Wellengleichungen durch

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0 \frac{\cos(kz-\omega t)}{\rho}\hat{e}_\rho \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{E_0}{c}\frac{\cos(kz-\omega t)}{\rho}\hat{e}_\varphi \tag{1}$$

gelöst werden. Wie muss dafür die Dispersion $\omega(k)$ lauten?
Hinweise: Sie können den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten verwenden:
$\Delta f = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho f) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 f + \partial_z^2 f$.

b) Verfizieren Sie, dass die Lösungen (1) die Randbedingungen für das E- und B-Feld an idealen Leitern erfüllen.

c) Nehmen Sie nun an, das innere Kabel sei unendlich dünn, $a \to 0$, aber noch immer ein idealer Leiter, der eine Linienladungsdichte $\lambda(z,t)$ tragen kann. Bestimmen Sie aus dem Satz von Gauß und dem Satz von Stokes die Ladung dq eines infinitesimalen Segments dz des inneren Zylinders, die Linienladungsdichte $\lambda(z,t) = dq/dz$, sowie den Strom $I(z,t)$ durch den inneren Zylinder.

d) Berechnen sie den Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ und die Energiedichte $w_{em}(\boldsymbol{r},t)$. Bestimmen Sie $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)/w_{em}(\boldsymbol{r},t)$ und diskutieren Sie die physikalische Interpretation des Ergebnisses.

2. Plötzlicher Strom durch einen Draht

10 + 10 + 5 + 5 + 10 = 40 Punkte

Im Rahmen der Magnetostatik haben Sie verschiedene Szenarien mit stromdurchflossenen Drähten behandelt. Nun werden Sie sehen, was sich ändert, wenn der Strom zeitabhängig ist.
Betrachten Sie einen Draht entlang der z-Achse. Der Draht ist elektrisch neutral. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird gleichzeitig im gesamten Draht ein Strom I_0 erzeugt, also $I(t) = I_0\Theta(t)$. Nehmen Sie an, dass der Draht unendlich lang ist, sodass $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = I(t)\delta(x)\delta(y)\hat{e}_z$.

a) Berechnen Sie die retardierten Potenziale $\phi(\rho, t)$ und $\boldsymbol{A}(\rho, t)$ im Abstand ρ vom Draht. Aufgrund der kontinuierlichen Translationssymmetrie können Sie $z = 0$ setzen.
Tipp: $\int_0^X dx \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \log(\sqrt{x^2+1} + x)\Big|_0^X$.

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus **a)**, um das B- und E-Feld als Funktion des Abstands ρ und der Zeit t zu bestimmen.

c) Welche Werte nehmen die elektromagnetischen Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ für $t \to \infty$ an? Stimmt das Ergebnis mit dem überein, was Sie vom zeitunabhängigen Fall erwarten würden?

d) Zeichnen Sie $E(\rho, t)$ und $B(\rho, t)$ mit Hilfe eines Computerprogramms. Sie können wahlweise eine farbkodierte, zweidimensionale Zeichnung in der ρ-t-Ebene anfertigen, zum Beispiel in Mathematica mit *ContourPlot*, siehe auch das Demo-Notebook auf ILIAS, oder mehrere Kurven für verschiedene t als Funktion von ρ zusammen in einem Graphen zeichnen.

e) Bestimmen sie den Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}(\rho, t)$ und die Energiedichte $w_{em}(\boldsymbol{r}, t)$. Diskutieren Sie die physikalische Interpretation des Ergebnisses.

3. Zirkulierende Ladung

15 + 15 + 5 = 35 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten Sie ein Problem mit einer bewegten Punktladung. Dies ist ein Beispiel für einen Anwendungsfall für die in der Vorlesung diskutierten Liénard-Wiechert-Potenziale.
Ein Teilchen mit der Ladung q bewege sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Radius R. Der Kreis befindet sich in der x-y-Ebene und hat seinen Mittelpunkt im Ursprung. Die Ladung befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\boldsymbol{r}_q(t = 0) = R\hat{e}_x$.

a) Bestimmen Sie die Liénard-Wiechert-Potenziale auf der z-Achse, d. h. für $\boldsymbol{r} = z\hat{e}_z$. Sie sollten folgendes Ergebnis erhalten:

$$\phi(z\hat{e}_z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{A}(z\hat{e}_z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega R}{c^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{e}_\varphi \Big|_{\varphi=\omega\tau} \tag{2}$$

b) Bestimmen Sie das E- und B-Feld im Ursprung.
Hinweis: Sie können dafür nicht *das Ergebnis aus **a)** nutzen, da dort die x- und y-Abhängigkeiten fehlen. Wenden Sie die Ableitungen direkt auf die Formeln der Liénard-Wiechert-Potenziale an und nutzen Sie aus, dass $\tau(t)$ bei $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ für den hier betrachteten Fall explizit nach t lösbar ist.*

c) Nehmen Sie nun an, die Punktladung würde zu einem dünnen Draht ausgeschmiert werden und dort einen homogenen Kreisstrom erzeugen. Vergleichen Sie das B-Feld im Zentrum dieses magnetostatischen Problem mit der Lösung aus **b)**.