
Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 10

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353

Abgabe: Montag, 13.01.2025 um 14:00 Uhr via ILIAS

Besprechung: Mittwoch, 15.01.2025 in den Tutorien

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_10_uvwx_Nachname.pdf", wobei uvwx das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

1. Nah- und Fernfeldnäherung des Hertzischen Dipols

5 + 10 + 10 + 5 + 5 + 10 + 10 = 55 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten Sie den Unterschied zwischen Nah- und Fernzone anhand eines Hertzischen Dipols.

Wir betrachten eine zeitlich oszillierende komplexe Ladungsverteilung beschrieben durch

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q(\delta(\mathbf{r} - d\hat{e}_z) - \delta(\mathbf{r} + d\hat{e}_z))e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Im Grenzfall $d \ll r = |\mathbf{r}|$ kann die Ladungsverteilung durch $\rho(\mathbf{r}, t) \approx -\mathbf{p}\nabla\delta(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ genähert werden mit dem Dipolmoment $\mathbf{p} = p\hat{e}_z = 2qd\hat{e}_z$. Dies impliziert nach der Kontinuitätsgleichung eine Stromdichte beschrieben durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -i\omega\mathbf{p}\delta(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

a) Bestimmen Sie das zugehörige retardierte Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

b) Bestimmen Sie das retardierte Skalarpotenzial $\phi(\mathbf{r}, t)$ in der Näherung $d \ll r$ bis zu linearer Ordnung in d/r .

Zum Vergleich: Sie sollten $\phi = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{e}_r}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\omega}{cr}\right) e^{-i\omega(t-r/c)}$ erhalten.

c) Bestimmen Sie das E- und B-Feld des Dipols anhand der retardierten Potenziale aus Teil a) und b).

Zum Vergleich: Sie sollten folgende Ergebnisse erhalten:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\omega^2}{c^2 r} (\hat{e}_r \times \mathbf{p}) \times \hat{e}_r + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{cr^2} \right) (3\hat{e}_r(\hat{e}_r \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}) \right] e^{-i\omega(t-r/c)}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} (\hat{e}_r \times \mathbf{p}) \left(\frac{1}{r} - \frac{c}{i\omega r^2} \right) e^{-i\omega(t-r/c)}$$

d) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ und das zeitliche Mittel $\langle \mathbf{S} \rangle$.

e) Bestimmen Sie die abgestrahlte Leistung P durch Integration von $dP = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{e}_r r^2 d\Omega$.

f) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Näherung für den Vektor \mathbf{g} aus Kapitel 5.9.1 im Skript das E-Feld, B-Feld, den Poynting-Vektor und die abgestrahlte Leistung P in der Fernfeld-Näherung, $\lambda \ll r$, mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi c/\omega$.

- g) Vergleichen Sie die Ergebnisse der Fernfeld-Näherung aus Teil f) mit den Ergebnissen aus den Aufgabenteilen davor im Bereich der Nahzone, $d \ll r \ll \lambda$. Vergleichen Sie dazu das E-Feld, B-Feld und den Poynting-Vektor in beiden Näherungen in der x-z-Ebene graphisch mittels eines Computerprogramms. Wie unterscheidet sich die abgestrahlte Leistung P ?

2. Fernfeld der Leiterschleife

5 + 2 + 3 = 10 Punkte

In dieser Aufgabe beschäftigen Sie sich etwas genauer mit den Fernfeld-Näherungen für zeitabhängige Felder am Beispiel einer Leiterschleife ohne beachtenswerte Ladungsverteilung, $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv 0$. Betrachten Sie dazu eine ideale Leiterschleife mit oszillierender physikalischer Stromdichte:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = I_0 \cos(\omega t) \delta(\rho - R) \delta(z) \hat{e}_\varphi . \quad (3)$$

- a) Berechnen Sie das E - und B -Feld in der Fernfeld-Näherung. Nutzen Sie dazu die aus der Vorlesung bekannten Näherungen der Form $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 ik}{4\pi r} e^{ikr} \hat{e}_r \times \mathbf{g}(k\hat{e}_r) + \mathcal{O}(1/r^2)$, siehe Kapitel 5.9 im Skript, sowie die Näherungen für die Funktion \mathbf{g} .
- b) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor \mathbf{S} .
- c) Bestimmen Sie die gesamte abgestrahlte Leistung P .

3. Elektrischer Dipol und Quadrupol

5 + 3 + 4 + 10 + 10 + 3 = 35 Punkte

Eine komplexe Ladungsverteilung sei gegeben durch

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^4 q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) e^{-i\omega t} . \quad (4)$$

wobei die Positionen \mathbf{r}_n der Punktladungen durch $\mathbf{r}_1 = a\hat{e}_x$, $\mathbf{r}_2 = a\hat{e}_y$, $\mathbf{r}_3 = -a\hat{e}_x$, $\mathbf{r}_4 = -a\hat{e}_y$ gegeben sind. Sie bestimmen hier in dieser Aufgabe mehrfach die Strahlungscharakteristik in der Fernfeldnäherung, was bedeutet, dass Sie die Multipolentwicklung $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - ik\mathbf{g}_1$ nutzen sollen, siehe im Skript Kapitel 5.9.

- a) Bestimmen Sie analog zu Aufgabe 1 Gleichung (2) einen Ausdruck für die Stromdichte im Grenzfall $a \ll r = |\mathbf{r}|$. Bestimmen Sie jedoch hier die Stromdichte bis inklusive zweiter Ordnung in a .
- b) Betrachten Sie den Fall $q_1 = -q_3 \equiv q$ und $q_2 = q_4 = 0$. Bestimmen Sie die Strahlungscharakteristik in der Fernfeldnäherung.
- c) Betrachten Sie den Fall $q_1 = -q_2 = q_3 = -q_4 \equiv q/2$. Bestimmen Sie die Strahlungscharakteristik in der Fernfeldnäherung.
- d) Betrachten Sie nun die Summe der Ladungen der vorherigen beiden Fälle, d. h. die Überlagerung eines Dipols und eines Quadrupols mit $q_1 = (3/2)q$ und $q_2 = q_3 = q_4 = -q/2$. Bestimmen Sie die Strahlungscharakteristik in der Fernfeldnäherung. Wie unterscheidet sich das Ergebnis von der Summe eines Dipols und eines Quadrupols?

- e) Es sei nun $q_n = q \exp(i\frac{\pi}{2}n)$. Überzeugen Sie sich, dass es sich hierbei um zwei gekreuzte Dipole handelt, die mit einer Phasenverschiebung von $\pi/2$ zeitlich oszillieren. Bestimmen Sie die Strahlungscharakteristik in der Fernfeldnäherung und vergleichen Sie das Ergebnis mit einem gewöhnlichen Hertzschen Dipol. Bestimmen Sie außerdem das B- und E-Feld in der Fernfeldnäherung jeweils in der x-y-Ebene sowie entlang der z-Achse. Welche Polarisation hat die elektromagnetische Welle in der x-y-Ebene und entlang der z-Achse?
- f) Warum ist der Fall $q_n = q$ für $n = 1, 2, 3, 4$ nicht physikalisch sinnvoll?

4. Evaluation der Veranstaltung

0 Punkte

Wir arbeiten kontinuierlich daran, unsere Lehre zu verbessern. Dafür brauchen wir Ihr Feedback. Was war gut an der Vorlesung und/oder Übung? Was könnten wir verbessern? Wie sind Schwierigkeitsniveau und Zeitaufwand für diese Veranstaltung? Bitte nehmen Sie sich dafür ein paar Minuten Zeit, die Evaluation zu bearbeiten.

Link zur Evaluation der Vorlesung:

<https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=H7FXP>

Link zur Evaluation der Übung:

<https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=ZDWS3>

Oder scannen Sie die QR-Codes:

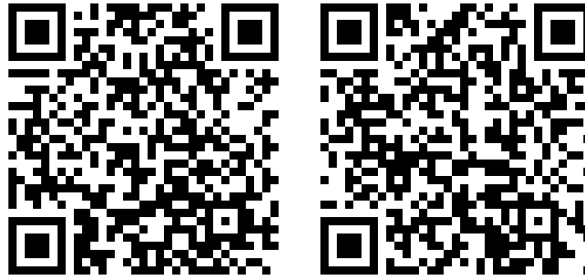


Abbildung 1: QR-Code zur Evaluation der Vorlesung (links) und Übung (rechts).