Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 11

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353

Abgabe: ***Montag**, 20.01.2025 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: ***Mittwoch**, 22.01.2025 in den Tutorien*

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_11_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

1. Potential und induzierte Ladung einer Kugel

10 + 10 + 5 + 10 = 35 Punkte

Eine metallische Kugel vom Radius a trägt die Ladung Q. Sie ist außerhalb bis zum Radius b von einem dielektrischen Material mit der skalaren Permittivität ϵ umgeben, wo gilt $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \epsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Das Problem ist radialsymmetrisch, weshalb wir Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) nutzen.
Ziel dieser Aufgabe ist es, das elektrische Potenzial $\phi(r)$ in Abhängigkeit von der Radialkoordinate r zu bestimmen und sich dabei mit den statischen, makroskopischen Maxwellgleichungen in Materie besser vertraut zu machen.

a) Bestimmen Sie die dielektrische Verschiebung $\boldsymbol{D}(r)$ mit Hilfe der makroskopischen Maxwellgleichungen.

b) Bestimmen Sie ausgehend von Teil **a)** das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(r)$ und daraus das Potenzial $\phi(r)$. Nutzen Sie die Konvention $\phi(\infty) = 0$.

c) Skizzieren Sie $\hat{e}_r \cdot \boldsymbol{D}(r)$, $\hat{e}_r \cdot \boldsymbol{E}(r)$ und $\phi(r)$.

d) Ermitteln Sie die Polarisationsladungsdichten σ_a und σ_b auf der äußeren und der inneren Oberfläche der dielektrischen Hohlkugel.

2. Ein Stabmagnet

5 + 15 + 5 + 5 = 30 Punkte

Betrachten Sie einen homogen geladenen Stabmagneten mit homogener Magnetisierung $\boldsymbol{M}$. Der Stabmagnet habe die Form eines Zylinders mit Länge L und Radius R. Die Magnetisierung ist in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) gegeben durch

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = M\Theta((L/2)^2 - z^2)\Theta(R - \rho)\hat{e}_z. \tag{1}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, das Magnetfeld $\boldsymbol{H}$ auf der z-Achse zu bestimmen und sich dabei mit den statischen, makroskopischen Maxwellgleichungen besser vertraut zu machen.

a) Bestimmen Sie den *Magnetisierungsstrom* $\boldsymbol{j}_M(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$, d.h. die mittlere Stromdichte der gebundenen Ladungen, die die Magnetisierung erzeugt.
Tipp: Sie sollten finden, dass sich der Magnetisierungsstrom auf die Manteloberfläche des Stabmagneten beschränkt.

b) Bestimmen Sie die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}(z\hat{e}_z)$ auf der z-Achse mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes und der Stromdichte $\boldsymbol{j}_M(\boldsymbol{r})$ aus Teil **a)**. Bestimmen Sie anschließend das Magnetfeld $\boldsymbol{H}(z\hat{e}_z)$ auf der z-Achse innerhalb und außerhalb des Stabmagneten.
Tipp: $\int dx \, \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{x}{(x^2+1)^{1/2}}$

c) Zeichnen Sie $\hat{e}_z \cdot \boldsymbol{B}(z\hat{e}_z)$ und $\hat{e}_z \cdot \boldsymbol{H}(z\hat{e}_z)$ aus Teil b) mit Hilfe eines Computerprogramms als Funktion von z/L. Wählen Sie dafür $R/L = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$ und zeichnen Sie auf dem Intervall $z/L \in [-4, 4]$.
Tipp: Sie können die Funktionenschar $B_z(z, R)$ und analog $H_z(z, R)$ für alle geforderten Werte von R/L zusammen in einer Zeichnung darstellen und brauchen so nur zwei Zeichnungen einreichen.

d) Bestimmen Sie das Magnetfeld $\boldsymbol{H}(z\hat{e}_z)$ auf der z-Achse in der Dipolnäherung, siehe Skript 5 Seite 14.
5 Bonuspunkte: Zeichnen Sie das Ergebnis zusammen mit dem exakten Ergebnis aus Teil b) für $R/L = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$ für $z/L \in [0.1, 100]$ in doppelt-logarithmischer Darstellung.

e) 10 Bonuspunkte: Bestimmen Sie das Magnetfeld $\boldsymbol{H}(x\hat{e}_x)$ und überprüfen Sie die Gültigkeit der Randbedingung bei $x = R$. Sie können die erforderliche Integration numerisch mit einem Computerprogramm auswerten.

3. Der Faraday-Effekt

5 + 5 + 10 + 5 + 10 = 35 Punkte

Die dielektrische Funktion $\epsilon(\boldsymbol{k}, \omega)$ und die Permeabilität $\mu(\boldsymbol{k}, \omega)$ sind im Allgemeinen Matrizen:

$$
\begin{aligned}
D_i(\boldsymbol{k}, \omega) &= \epsilon_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) \, E_j(\boldsymbol{k}, \omega) && (2)\\
B_i(\boldsymbol{k}, \omega) &= \mu_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) \, H_j(\boldsymbol{k}, \omega) \; . && (3)
\end{aligned}
$$

In dieser Aufgabe betrachten Sie den Fall einer diagonalen dielektrischen Funktion und einer Permeabilität mit Außerdiagonalelementen:

$$
\epsilon_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) = \epsilon \, \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \mu(\boldsymbol{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \mu_1 & -i\mu_2 & 0 \\ i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix} \tag{4}
$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass $0 < \epsilon$, $0 < \mu_2 < \mu_1$ und $0 < \mu_z$. Elektromagnetische Wellen in einem Medium mit dieser Eigenschaft zeigen richtungsabhängige Polarisation, wie Sie im Folgenden herleiten werden. Nehmen Sie dazu an, dass das System frei von Ladung und Strömen ist, $\rho(\boldsymbol{r}, t) = 0$ und $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$.

a) Führen Sie eine Fouriertransformation der makroskopischen Maxwellgleichungen bezüglich Ort und Zeit durch.

b) Welche Relationen zwischen $\boldsymbol{k}$ und den fouriertransformierten Feldern $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega)$ folgen aus dem makroskopischen Faraday-Gesetz und den Gaußschen Gesetzen für $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{B}$? Zeigen Sie insbesondere, dass $P_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$ für den Projektor $P_{\boldsymbol{k}} = \mathbb{1} - \hat{k}\hat{k}^T$.

c) Leiten Sie aus dem makroskopischen Ampère-Maxwell Gesetz her, dass die Fouriertransformierte $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega)$ folgender Wellengleichung genügt,

$$P_{\boldsymbol{k}}(\mu^{-1})P_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{B} = \epsilon\frac{\omega^2}{k^2}\boldsymbol{B}. \tag{5}$$

In den folgenden Teilaufgaben werden Lösungen dieser Eigenwertgleichung diskutiert.

d) Betrachten Sie eine elektromagnetische Welle in x-Richtung, d.h. $\boldsymbol{k} = k_x\hat{e}_x$. Bestimmen Sie für diesen Fall die zwei nicht-trivialen Lösungen der obigen Wellengleichung (5), also die Dispersionen der Wellenlösungen und die dazugehörigen Polarisationen von $\boldsymbol{B}$.

e) Betrachten Sie nun eine elektromagnetische Welle in z-Richtung, d.h. mit $\boldsymbol{k} = k_z\hat{e}_z$ und $k_z > 0$. Bestimmen Sie für diesen Fall die zwei nicht-trivialen Lösungen der Wellengleichung (5). Zeigen Sie, dass für gegebene Frequenz $\omega > 0$ zwei Lösungen $k_z^{\pm} = \sqrt{\epsilon(\mu_1 \pm \mu_2)}\omega$ mit Polarisationen $\hat{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y)$ existieren.
Betrachten Sie nun eine monochromatische Welle mit Frequenz $\omega > 0$ im Realraum, deren $\boldsymbol{B}$-Feld am Ort $z = 0$ gegeben ist durch $\boldsymbol{B}(z,t)|_{z=0} = B_0\cos(\omega t)\hat{e}_x$. Bestimmen Sie $\boldsymbol{B}(z,t)$. Bringen Sie das Ergebnis in die folgende Form

$$\boldsymbol{B}(z,t) = B_0\cos(kz-\omega t)\Big(\cos\left(\frac{\delta k\, z}{2}\right)\hat{e}_x - \sin\left(\frac{\delta k\, z}{2}\right)\hat{e}_y\Big) \tag{6}$$

mit $k = \frac{k_z^+ + k_z^-}{2}$ und $\delta k = k_z^+ - k_z^-$. Der letzte Term beschreibt den Faraday Effekt, d.h. eine Drehung der Polarisation um einen Winkel $\delta k/2$ pro Länge.