Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 12

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353
Abgabe: ***Montag**, 27.01.2025 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: ***Mittwoch**, 29.01.2025 in den Tutorien*

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen im Format "Blatt_12_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

1. Plasmaoszillation in Metallen

10 + 10 = 20 Punkte

Betrachten Sie das Verhalten von Elektronen in Metallen in Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}(\omega)$, siehe auch Kapitel 6.5 im Skript. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Plasmafrequenz ω_p zu bestimmen, bei der Ladungsdichten $\rho(\boldsymbol{k}, \omega)$ oszillieren.

a) Zeigen Sie, dass sich aus der Newtonschen Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen ergibt

$$-i\omega m \boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}, \omega) = nq^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) \;, \tag{1}$$

wobei m die Masse, n die Dichte und q die Ladung der freien Ladungsträger ist. $\boldsymbol{j}$ ist der resultierende elektrische Strom.

b) Nutzen Sie die Kontinuitätsgleichung und die Maxwellgleichung $\epsilon_{\text{geb}} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$ um herzuleiten, dass das Modell in Teil **a)** nur bei der Plasmafrequenz

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_{\text{geb}}}} \tag{2}$$

Lösungen mit $\rho(\boldsymbol{k}, \omega) \neq 0$ hat, wobei ϵ_{geb} die dielektrische Konstante der gebundenen Ladungsträger im Material ist.

2. Elektromagnetische Wellen in Leitern: Der Skin-Effekt

10 + 10 = 20 Punkte

Betrachten Sie elektromagnetische Wellen mit langer Wellenlänge in Materie, siehe auch Kapitel 6.6. Sie haben in der Vorlesung hergeleitet, dass die Eindringtiefe d in das Material gegeben ist durch

$$d = \frac{c}{\kappa(\omega)\,\omega} \;, \tag{3}$$

wobei $\kappa(\omega)$ der Imaginärteil des komplexen Brechungsindex ist.
In dieser Aufgabe betrachten wir den Grenzfall kleiner Frequenzen, wo wir

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) \approx \epsilon - \frac{\sigma}{i\omega} \quad \text{und} \quad \mu(\omega) \approx \mu \tag{4}$$

nähern können und leiten das Verhalten der Eindringtiefe als Funktion von ω für unterschiedliche Grenzfälle her.

a) Betrachten Sie den Grenzfall eines schlechten elektrischen Leiters, $\sigma \ll \epsilon\omega$, und leiten Sie die in diesem Grenzfall frequenzunabhängige Eindringtiefe her. Welche Eindringtiefe folgt für Wasser?
Parameter für Wasser: $\epsilon \approx 80\epsilon_0$, $\mu \approx \mu_0$, *Wasserhärte in Karlsruhe ca* $18°$ *dH, entspricht* $\sigma \approx 18 \times 10^{-3} S/m$.

b) Betrachten Sie den Grenzfall eines guten elektrischen Leiters, $\sigma \gg \epsilon\omega$, und leiten Sie die Eindringtiefe $d \propto \omega^{-1/2}$ her, bekannt als *Skin-Effekt.* Welche Eindringtiefe folgt für ein typisches Metall im sichtbaren Bereich? Warum sind Metalle undurchsichtig? Welche Phasenverschiebung $\delta(\omega)$ ergibt sich in diesem Grenzfall?
Parameter für Kupfer: $\sigma \approx 58 \times 10^6 S/m$, $\mu \approx \mu_0$.
Wellenlänge von sichtbarem Licht: $\lambda \approx 400 \sim 700nm$.

3. Und der Himmel ist blau

10 Punkte

Streuung von Licht an einem diffusen Gas kann in einem einfachen Bild wie folgt betrachtet werden: Die Moleküle des Gases werden vom einfallenden Licht zu Dipolschwingungen angeregt. Die angeregten Dipole strahlen wiederum mit der aus der Ihnen bekannten Abstrahlungscharakteristik Hertzscher Dipole Streulicht ab.
Argumentieren Sie darauf basierend, warum (1) der Himmel blau und (2) der Sonnenuntergang rot ist.

4. Wellenausbreitung in dielektrischer Platte

5 + 5 + 5 + 5 + 10 + 10 + 10 = 50 Punkte + 10 Bonuspunkte

Eine Platte der Dicke d aus einem Material mit Dielektrizitätskonstante ϵ befinde sich in der x-y-Ebene bei $|z| < d/2$. Der Außenraum sei Luft mit Dielektrizitätskonstante ϵ_0. In die Platte wird eine ebene elektromagnetische Welle injiziert. Die Welle ist in y-Richtung polarisiert, $\boldsymbol{E}||\hat{e}_y$. Dies ist ein einfaches Modell für die Übertragung von Licht in Glasfaserkabeln. Ziel dieser Aufgabe ist es, dieses Modell auf die Existenz von unendlich lange innerhalb der Platte propagierenden Wellen hin zu untersuchen.

a) Nutzen Sie für das Vektorpotenzial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ in der Platte den Ansatz

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}_1 e^{i(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)} + \boldsymbol{A}_2 e^{i(\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{5}$$

wobei $\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{r}, t)$ das Vektorpotenzial einer ebenen Welle beschreibt. Die beiden ebenen Wellen $i = 1$ und $i = 2$ sind jeweils durch Reflexion an den Grenzflächen gekoppelt. Argumentieren Sie, dass der Ansatz sich unter Ausnutzung der Reflexion und der Polarisation von $\boldsymbol{E}$ vereinfacht zu:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \left[A_1 e^{ik_z z} + A_2 e^{-ik_z z}\right] e^{i(k_x x - \omega t)} \hat{e}_y \ . \tag{6}$$

b) Wir sind an stationären Zuständen interessiert, d. h. Zuständen mit $\mathrm{Im}(\omega) = 0$, die nicht als Funktion der Zeit zerfallen. Zeigen Sie, dass mit dem Ansatz aus Gl. (6) aus der Wellengleichung folgt, dass für stationäre Zustände gelten muss:

$$(k'_x)^2 - (k''_x)^2 + (k'_z)^2 - (k''_z)^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2} \tag{7}$$

$$k'_x k''_x + k'_z k''_z = 0 \tag{8}$$

wobei hier die Notation für Real- und Imaginärteile $k = k' + ik''$ aus der Vorlesung genutzt wird. n ist der Brechungsindex.

c) Zeigen Sie, dass die Gruppengeschwindigkeit $v_x \equiv \partial\omega/\partial k'_x$ sich für unendlich langreichweitige Wellen mit $k''_x = 0$ zu $v_x = (c/n)\sin\alpha$ ergibt. Analog zur Vorlesung beschreibt $\sin\alpha = k'_x/k$ den Winkel zwischen dem Wellenvektor und der z-Achse, welche senkrecht auf der Grenzfläche steht.

Wellen, die unendlich lange innerhalb der Platte propagieren, brauchen $k'_x \neq 0$ und $k''_x = 0$. Aus Gleichung (8) folgt damit, dass entweder $k'_z = 0$ oder $k''_z = 0$ sein muss. Diese beiden Fälle analysieren wir im Folgenden auf die Existenz von Lösungen.

d) Betrachten Sie den ersten Fall mit $k'_z = 0$ und $k''_z \neq 0$. Zeigen Sie, dass aus Gleichung (7) folgt, dass keine unendlich innerhalb der Platte langlebigen Lösungen mit $k'_z = 0$ und $k''_z \neq 0$ existieren.

Betrachten Sie folgend den zweiten Fall mit $k'_z \neq 0$ und $k''_z = 0$. Analog zu Teil **a)** nutzen wir außerhalb der Platte den Ansatz $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = [A_{g,1}e^{ik_{g,z}z} + A_{g,2}e^{-ik_{g,z}z}]e^{i(k_{g,x}x - k_{g,z}d/2 - \omega t)}\hat{e}_y$, wobei der zusätzliche Phasenfaktor $e^{-ik_{g,z}d/2}$ explizit abgespalten wurde. Die Relationen aus Teil **b)** gelten auch für diesen Ansatz außerhalb der Platte, wobei dann $k_x \to k_{g,x}$, $k_z \to k_{g,z}$ und $n = 1$.

e) Berechnen Sie nun $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ aus dem Vektorpotenzial innerhalb und außerhalb der Platte. Nutzen Sie die Randbedingungen an Grenzflächen um zu zeigen, dass

$$k_{g,x} = k_x \quad \text{und} \quad e^{2ik_z d} = \left(\frac{k_z + k_{g,z}}{k_z - k_{g,z}}\right)^2 . \tag{9}$$

f) Betrachten Sie den zweiten Fall mit $k'_z \neq 0$ und $k''_z = 0$. Zeigen Sie, dass letztere Bedingung in Gleichung (9) aufgelöst nach $k_{g,z}$ zu den folgenden beiden transzendenten Gleichungen für α führt:

$$\frac{\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\cos\alpha} = \tan\left(\frac{n\Delta\cos\alpha}{2}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}}{n\cos\alpha} = -\cot\left(\frac{n\Delta\cos\alpha}{2}\right) , \tag{11}$$

wobei $\Delta = \frac{\omega d}{c}$ die Dicke der Platte in Einheiten von c/ω ist.

Lösungen α der transzendenten Gleichung (10) bzw. (11) beschreiben die Winkel, bei denen gerade bzw. ungerade TE-Moden unendlich lange innerhalb der Platte propagieren.
Die transzendenten Gleichung (10) und (11) können numerisch oder grafisch gelöst werden. Letzteres ist möglich, indem die linke und rechte Seite der Gleichung jeweils als unabhängige

Funktionen von α interpretiert werden. Schnittpunkte zwischen den beiden Funktionen treten bei den Werten von α auf, welche die transzendente Gleichung erfüllen.

g) Zeichnen Sie die linken und rechten Seiten der Gleichungen (10) und (11) als drei unabhängige Funktionen von α, $\alpha \in [0, \pi/2]$, mit einem Computerprogramm für $n = 2$ und $\Delta = 1$ und $\Delta = 8$. Wie viele Lösungen zählen Sie für die geraden bzw. ungeraden TE-Moden?

h) 10 Bonuspunkte: Zeigen Sie, dass Gleichung (10) immer mindestens eine Lösung hat und dass Lösungen von Gleichung (11) nur für $\Delta \geq \pi/\sqrt{n^2 - 1}$ existieren.