(1) a) 2. Newtonsches Gesetz: $\vec{F}(\vec{r},t) = m\,\partial_t\,\vec{v}(\vec{r},t)$ mit $\vec{F}(\vec{r},t) = q\vec{E}(\vec{r},t)$

$$\rightarrow q \iint \frac{1}{(2\pi)^4} \vec{E}(\vec{k},\omega) e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\, d\omega d\vec{k} = m\,\partial_t \iint \frac{1}{(2\pi)^4} \vec{v}(\vec{k},\omega) e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\, d\omega d\vec{k}$$

mit $\vec{j}(\vec{k},\omega) = q n \vec{v}(\vec{k},\omega)$:

$$\Leftrightarrow q \iint \frac{1}{(2\pi)^4} \vec{E}(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}\, d\omega d\vec{k} = -\frac{i\omega m}{qn} \iint \frac{1}{(2\pi)^4} \vec{j}(\vec{k},\omega)\, d\omega d\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow q\vec{E}(\vec{k},\omega) = -\frac{i\omega m}{qn} \vec{j}(\vec{k},\omega)$$

$$\Leftrightarrow -i\omega m \vec{j}(\vec{k},\omega) = n q^2 \vec{E}(\vec{k},\omega)$$ ✓ //

10/10

b) Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r},t) = 0$

$$\rightarrow \partial_t \iint \frac{1}{(2\pi)^4} \rho(\vec{k},\omega) e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} + \vec{\nabla} \iint \frac{1}{(2\pi)^4} \vec{j}(\vec{k},\omega) e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} = 0$$

$$\Leftrightarrow -i\omega\, \rho(\vec{k},\omega) + i\vec{k}\vec{j}(\vec{k},\omega) = 0$$ ✓

mit $\varepsilon_{ges} \vec{\nabla}\vec{E} = \rho \Leftrightarrow \varepsilon_{ges}\, i\vec{k}\vec{E}(\vec{k},\omega) = \rho(\vec{k},\omega)$ und dem Ergebnis aus a):

$$\Leftrightarrow i\omega\varepsilon_{ges} \cancel{i\vec{k}}\, \vec{E}\cancel{(\vec{k},\omega)} = \cancel{i\vec{k}} \left(-\frac{n q^2}{i\omega m} \vec{E}\cancel{(\vec{k},\omega)}\right)$$

$$\omega_p^2 = \frac{n q^2}{m\varepsilon_{ges}} \Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{n q^2}{m\varepsilon_{ges}}}$$ ✓ //

10/10

Gesamt: 20/20

(2) a)

$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$$
$$i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B}$$
$$i\vec{k}\times\vec{B} = \mu\sigma\vec{E} - i\mu\varepsilon\omega\vec{E} \quad \text{mit } \varepsilon_{eff} = \varepsilon - \frac{\sigma}{i\omega}$$ ✓

$$\vec{k}\times(i\vec{k}\times\vec{E}) = \vec{k}\times i\omega\vec{B} = \omega(\mu\sigma\vec{E} - i\mu\varepsilon\omega\vec{E})$$

$$(\vec{k}\vec{E})i\vec{k} - (i\vec{k}\vec{k})\vec{E} = -ik^2\vec{E} = \mu\sigma\omega\vec{E} - i\mu\varepsilon\omega^2\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\underbrace{k^2 - \mu\varepsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega}_{\overset{!}{=}0})\vec{E}$$

i.A komplexes k

Daraus folgt die Dispersionsrelation

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \Rightarrow k = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega} = n(\omega)\frac{\omega}{c} = n_r(\omega)\frac{\omega}{c} + i\varkappa(\omega)\frac{\omega}{c}$$

$$n(\omega) = \frac{c}{\omega}\sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega} = c\sqrt{\mu\varepsilon + \frac{i\mu\sigma}{\omega}} = c\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon\omega}}$$

$$= c\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{i\sigma}{\varepsilon\omega} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{i\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2\right)\right] \checkmark \quad \text{mit } \sigma \ll \omega\varepsilon$$

$$\Rightarrow n(\omega) = n_r(\omega) + i\varkappa(\omega) \quad \text{mit} \quad n_r(\omega) = c\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\varkappa(\omega) = c\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cdot\frac{c}{\omega}$$

$$d = \frac{c}{\varkappa(\omega)\omega} = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \checkmark \approx \frac{2}{18\cdot 10^{-3}\frac{S}{m}}\sqrt{\frac{80\varepsilon_0}{\mu_0}} \approx 2{,}63798\,m \checkmark \quad \underline{10/10}$$

b) $$n(\omega) = \frac{c}{\omega}\sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega} = c\sqrt{\mu\varepsilon + \frac{i\mu\sigma}{\omega}} = c\sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}}\sqrt{i + \frac{\varepsilon\omega}{\sigma}}$$

$$= c\sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}}\left[\sqrt{i} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon\omega}{\sigma}\right)\right)\right]$$

$$= c\sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}}\left[\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon\omega}{\sigma}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \varkappa(\omega) = c\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} \Rightarrow d = \frac{c}{\varkappa(\omega)\omega} = \frac{c}{\omega}\frac{1}{c}\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \checkmark$$

Sichtbares Licht hat Wellenlängen im Bereich $\lambda = 400 \sim 700\,nm$

$$\Rightarrow d_{max} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\cdot 58\cdot 10^6\frac{S}{m}\cdot\frac{2\pi c}{400\cdot 10^{-9}m}}} = 3{,}19\,nm \checkmark$$

$$d_{min} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\cdot 58\cdot 10^6\frac{S}{m}\cdot\frac{2\pi c}{400\cdot 10^{-9}m}}} = 2{,}41\,nm \checkmark$$

Sichtbares Licht kann also fast gar nicht in Metall (z.B. hier Kupfer) eindringen. ✓
Der Großteil wird also reflektiert oder absorbiert

$\delta: n = n_R + i\kappa = |n|e^{i\delta(\omega)} \quad \measuredangle\, |\!\pm i$

$$\left(\text{Reflexionskoeffizient } R = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|^2 = \left|\frac{\frac{n_1}{n_2} - 1}{\frac{n_1}{n_2} + 1}\right|^2 \overset{n_1 = 1 \ll |n_2|}{=} 1\right)$$

$\Rightarrow \delta = \pi/4$

$$\vec{B}(k,\omega) = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}(k,\omega) = n(\omega)c\hat{e}_r\times\vec{E}(k,\omega) = |n(\omega)|c\,\hat{e}_r\times\vec{E}(k,\omega)e^{i\delta(\omega)} \quad \Big| \; c\sqrt{\mu\varepsilon + \frac{i\mu\sigma}{\omega}} \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}i}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}i} = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega} + \frac{1}{2}}\,e^{i\delta(\omega)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega} + \frac{1}{2}}\cos(\delta) + i\sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega} + \frac{1}{2}}\sin(\delta)$$

$$\Rightarrow \sin(\delta) = \sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma} + 1} \Rightarrow \delta(\omega) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma} + 1}\right) \quad f \quad -1 \quad \underline{9/10} \rightarrow \text{Gesamt: } \underline{19/20}$$

③ (1 Für Hertz'sche Dipole ist die Strahlungintensität im Fernfeld Abhängig von der Frequenz: $I \propto |\vec{p}|^2 \omega^4 = |\vec{p}|^2 (2\pi f)^4$ ✓

Licht hoher Frequenz wird also deutlich intensiver abgestrahlt. ✓
Vom sichtbaren Licht ($\lambda = 400 \sim 700nm$) hat blaues Licht ($\lambda \approx 400nm$) die höchste Frequenz. daher sieht der Himmel blau aus. ✓

(2) Bei Sonnenaufgang und Sonnenuntergang trifft das Sonnenlicht sehr schräg zur Oberfläche ein.
Die Atmosphäre ~~absorbiert~~ streut also einen Teil der Energie und die Gasmoleküle werden schwächer angeregt. Das bedeutet, dass Strahlung niedrigerer ~~Frequenz abgestrahlt wird~~. Niedrigfrequentes sichtbares Licht hat die Farbe rot.

Es bleibt schlicht fast nur rotes Licht übrig, das dann den Beob. trifft.

-3

Ges.: 7/10

④ a)

$\vec{B}(\vec{k},\omega) = i\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k},\omega), \vec{E}(\vec{k},\omega) = -i\vec{k}\phi - i\omega\vec{A}(\vec{k},\omega), \vec{k} \times \mu\vec{H}(\vec{k},\omega) = -\frac{\omega}{\varepsilon}\vec{E}(\vec{k},\omega)$ mit $\phi = 0$ (Coulombeichung)

$\Leftrightarrow \vec{A} \parallel \vec{E}, \vec{E} \perp \vec{B}, \vec{E} \perp \vec{k}, \vec{B} \perp \vec{k}$

$\vec{k}_1 = k_x \hat{e}_x + k_z \hat{e}_z$

Damit folgt mit $\vec{E} \parallel \hat{e}_y$, dass ~~$\hat{k} = \hat{e}_x$~~, $\hat{e}_z$ und, dass

$\vec{A}_1, \vec{A}_2 \parallel \hat{e}_y$ ✓ $\Rightarrow \vec{A}_i = A_i \hat{e}_y$

Für die Vektorpotentiale folgt als Linearkombination

$\vec{A}_1(\vec{r},t) = \vec{A}_1 e^{i(\tilde{k}_z z + \tilde{k}_x x - \omega t)}$, $\vec{A}_2(\vec{r},t) = \vec{A}_2 e^{i(k_z z + k_x x - \omega t)}$

Die Wellen seien durch die Reflektion gekoppelt $\Leftrightarrow \tilde{k}_z = -k_z$ (Reflektion d. z-Komponente), $\tilde{k}_x = k_x$

Insgesamt folgt also

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_1(\vec{r},t) + \vec{A}_2(\vec{r},t) = \left(A_1 e^{ik_z z} + A_2 e^{-ik_z z}\right) e^{i(k_x x - \omega t)} \hat{e}_y$$ ✓

5/5

b) Wellengleichung: $(\Delta - \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\partial_t^2)\vec{A}(\vec{r},t) = 0$

$$\Leftrightarrow \Delta\left(A_1 e^{ik_z z} + A_2 e^{-ik_z z}\right)e^{i(k_x x - \omega t)}\,\hat{e}_y = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\partial_t^2\left(A_1 e^{ik_z z} + A_2 e^{-ik_z z}\right)e^{i(k_x x-\omega t)}\,\hat{e}_y$$

$$\Leftrightarrow \left(k_x^2 + k_z^2\right.\ \left(A_1 e^{ik_z z} + A_2 e^{-ik_z z}\right)e^{i(k_x x - \omega t)}\,\hat{e}_y = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2\left(A_1 e^{ik_z z} + A_2 e^{-ik_z z}\right)e^{i(k_x x-\omega t)}\,\hat{e}_y$$

$$\Leftrightarrow (k_x' + ik_x'')^2 + (k_z' + ik_z'')^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2$$

$$k_x'^2 + 2ik_x'k_x'' - k_x''^2 + k_z'^2 + 2ik_z'k_z'' - k_z''^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2$$

$$k_x'^2 - k_x''^2 + k_z'^2 - k_z''^2 + 2i\,(k_x'k_x'' - k_z'k_z'') = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2}$$

Dabei ist $\mathrm{Im}(\omega) = 0$ für $k_x'k_x'' + k_z'k_z'' = 0$ erfüllt

Damit folgt: $k_x'^2 - k_x''^2 + k_z'^2 - k_z''^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$ ✓ 5/5

c) $k_x'^2 - k_x''^2 + k_z'^2 - k_z''^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$

$\Leftrightarrow \omega = \frac{c}{n}\sqrt{k_x'^2 - k_x''^2 + k_z'^2 - k_z''^2}$ mit $k_x'' = 0$:

$$v_x = \frac{\partial\omega}{\partial k_x'} = \frac{\partial}{\partial k_x'}\left(\frac{c}{n}\sqrt{k_x'^2 + k_z'^2 - k_z''^2}\right)$$

5/5

$$= \frac{c\,k_x'}{n\sqrt{k_x'^2 + k_z'^2 - k_z''^2}} = \frac{c}{n}\frac{k_x'}{k} = \frac{c}{n}\sin\alpha \quad \text{mit } \sin\alpha = \frac{k_x'}{k}$$

d) $k_z' = 0,\ k_z'' \neq 0,\ k_x' \neq 0,\ k_x'' = 0$

$$\Rightarrow k_x'^2 - \cancel{k_x''^2} + \cancel{k_z'^2} - k_z''^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$$

$\Leftrightarrow k_x'^2 - k_z''^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$ mit $k_x' = k\sin\alpha$ 5/5

$$\Leftrightarrow -k_z''^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} - k_x'^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}(1 - \sin^2\alpha) = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow k_z'' = \sqrt{-\frac{\omega^2 n^2}{c^2}\cos^2\alpha} = i\sqrt{\frac{\omega^2 n^2}{c^2}\cos^2\alpha}\ ↯ ✓$$

$\Leftrightarrow$ Für $k_z' = 0,\ k_z'' \neq 0$ existiert kein reelles k_z''

e) fehlt 0/10
f) fehlt 0/10
g) fehlt 0/10
h) fehlt 0/10 Bonus

Gesamt: 5+5+5+5+0+0+0 = 20/50 + 0/10 Bonus

Summe: 20 + 19 + 7 + 20 = $\boxed{66/100}$