

$$\textcircled{1} \quad ct_i = \gamma(ct_i' + \beta x_i') \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_i = \gamma(x_i' + \beta ct_i')$$

$$y_i = y_i'$$

$$z_i = z_i'$$

94/100 nice! (4)

$$ct_i' = \frac{c}{\gamma} t_i - \beta x_i'$$

$$x_i' = \frac{x_i}{\gamma} - \beta ct_i'$$

$$\Rightarrow ct_i' = \frac{c}{\gamma} t_i - \beta \left(\frac{x_i}{\gamma} - \beta ct_i' \right)$$

$$\Leftrightarrow ct_i' + \beta^2 ct_i' = \frac{c}{\gamma} t_i - \frac{\beta x_i}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow ct_i' = \gamma (ct_i - \beta x_i)$$

Für die zwei Ereignisse gilt also:

$$ct_1' = \gamma(ct_1 - \beta x_1)$$

$$x_1' = \gamma(x_1 - \beta ct_1)$$

$$\Delta ct' = ct_2' - ct_1' = \gamma[(ct_2 - \beta x_2) - (ct_1 - \beta x_1)] = \gamma(ct_2 - \beta \Delta x)$$

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma[(x_2 - \beta ct_2) - (x_1 - \beta ct_1)] = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t)$$

a) Damit beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden, muss $\Delta x' = 0$ gelten:

$$\Leftrightarrow \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta x}{c \Delta t} = \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \left| \text{mit } \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0 \Leftrightarrow c^2 \Delta t^2 > \Delta x^2 \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = v \right.$$

b) Beide Ereignisse sollen zur gleichen Zeit stattfinden:

$$\Leftrightarrow \Delta ct' \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma(ct_2 - \beta \Delta x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{c \Delta t}{\Delta x} \quad \checkmark$$

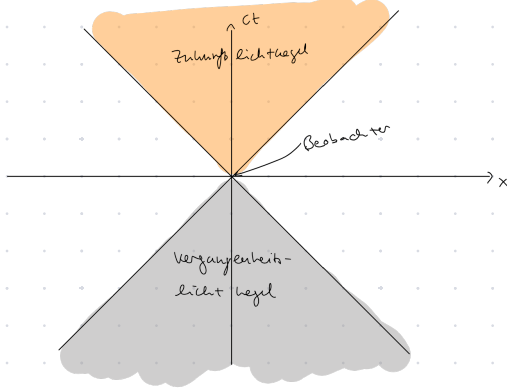
$$\Rightarrow v = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x} = c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} \quad \left| \text{mit } \Delta s^2 < 0 \Leftrightarrow c^2 \Delta t^2 < \Delta x^2 \Leftrightarrow \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} v^2 < 1 \right.$$

$$\Leftrightarrow v < c \quad \checkmark$$

$$c) \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta t^2 < \frac{\Delta x^2}{c^2}$$

$$\frac{\Delta t}{c} < \frac{\Delta x}{c}$$



Ereignisse im Zukunftsbereich sind vom Beobachter beeinflussbar und Ereignisse im Vergangenheitsbereich können ihn beeinflussen.

$\Delta s^2 < 0$: Die Ereignisse können zu selben Zeit stattfinden, aber an einem anderen Ort.

Die zeitliche Reihenfolge hängt von der Bewegung des Beobachters ab.

Kausalität: Da sich das Ereignis zur gleichen Zeit wie die Beobachtung stattfinden kann, ist es außerhalb der beiden Kegele, damit spielt Kausalität keine Rolle. ✓

d) Der Fahrradfahrer ruhe im Bez.-sys. K_1 , während sich der Rest mit $v = -\frac{3}{5}c$ bewegt.

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow \Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\Rightarrow L_F = L'_F \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = L'_F \sqrt{1 - \left(\frac{3c}{5c}\right)^2} = \frac{4}{5} L'_F, \quad L'_F = \frac{L_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{5}{4} L_F \quad \checkmark$$

Fahrrad ist vollständig im Tunnel bis erster Teil des Fahrrads kommt raus:

40/40

$$\Delta s = L_T - L_F = \frac{9}{20} L'_F = \frac{9 \cdot 5}{80} L'_F \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{15}{16} \frac{L'_F}{c}$$

② $v_s = \frac{2}{3}c$

a) $v_s = \frac{v_s' + v}{1 + \frac{v_s' v}{c^2}} \quad (\text{Kap 7.2.2})$

$$\Leftrightarrow v_s \left(1 + \frac{v v_s'}{c^2}\right) = v_s' + v$$

$$\Leftrightarrow v_s - v = v_s' \left(1 - \frac{v_s v}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow v_s' = \frac{v_s - v}{1 - \frac{v_s v}{c^2}} = \frac{\frac{2}{3}c - v}{1 - \frac{2v}{3c}} \quad \checkmark = \frac{\frac{2}{3} - \beta}{1 + \frac{2}{3}\beta} c$$

$$\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(i) Langsame Sonde ($\beta = \frac{2}{3} < 1$)

$$v_s' = \frac{\frac{2}{3}c - v}{1 - \frac{2}{3}\beta} \approx \frac{2}{3}c - v = v_s - v \quad (\text{vgl. Galilei-Transf.})$$

NR: $\frac{1}{1 - \frac{2}{3}\beta} = 1 + \underbrace{O(\beta)}_{= 1. \text{ Ordnung}}$

(ii) Schnelle Sonde ($\beta = \frac{v}{c} \approx 1 \Leftrightarrow v \approx c$)

$$v'_s = \frac{\frac{2}{3}c - v}{1 - \frac{2}{3}\frac{v}{c}} \xrightarrow{v \approx c} v'_s \approx -c$$

!

Die Sonde scheint sich mit Lichtgeschwindigkeit von K1 zu entfernen 4/10

$$b) \quad ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}y}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad y' = \frac{y - vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}y}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad dy = \frac{dy' + vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_y} \quad u_y = 0 \Rightarrow -v$$

$$u'_x = \frac{1 + \frac{vu_y}{c^2}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} u_x = \sqrt{\frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} u_x = \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} u_x = \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \cdot \frac{2}{3}c$$

$$\bullet \quad \beta = \frac{v}{c} \ll 1: \quad \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \approx 1 - \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 + \mathcal{O}((\frac{v}{c})^4)$$

$$\Rightarrow u'_x = u_x + \mathcal{O}((\frac{v}{c})^2) \quad \checkmark$$

$$\bullet \quad \beta = \frac{v}{c} \approx 1 (\Leftrightarrow v \approx c): \quad u'_x \approx 0 \quad \checkmark$$

4/20

③

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit } \tau = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

a) $v = 0,98c$

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \quad \Leftrightarrow \quad \int d\tau = \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (0,98)^2}} = \frac{2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0,98)^2}} \approx 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

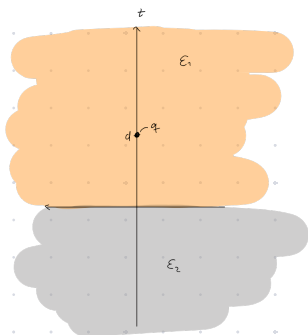


b) $\Delta x = 15000 \text{ m}$, $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - (0,98)^2}} = 2985 \text{ m} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta x'}{v} = \frac{2985 \text{ m}}{0,98c} \Rightarrow N = N_0 e^{-\frac{(c\Delta t')}{\tau}} \approx 0,0039 \cdot N_0$



20/20

④



a) • Für das Potential im Halbraum $z > 0$ wird eine Spiegelladung q' bei $z = -d$ platziert.

In Zylinderkoordinaten ergibt sich das Potential

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right), \quad z > 0$$

• Für den Halbraum $z < 0$ ergibt sich das Potential aus einer Ladung q'' bei $z = d$:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{q''}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \right), \quad z < 0$$

• Bei $z = 0$ gelten die Randbedingungen:

• $(\vec{D}_{\text{oben}} - \vec{D}_{\text{unten}}) \cdot \hat{n} = 0 \quad (1)$

• $(\vec{E}_{\text{oben}} - \vec{E}_{\text{unten}}) \times \hat{n} = 0 \quad (2)$

$$\text{NR: } \left| \begin{aligned} \partial_z \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \Big|_{z=0} &= -\partial_z \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \Big|_{z=0} = \frac{d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \\ \partial_\rho \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \Big|_{z=0} &= \partial_\rho \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \Big|_{z=0} = -\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \end{aligned} \right|$$

Von oben:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \Rightarrow -\epsilon_1 \vec{\nabla} \phi \Big|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{dq}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} - \frac{dq'}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \right) \hat{e}_z - \left(\frac{\rho q}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} - \frac{\rho q'}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \right) \hat{e}_\rho \right]$$

Von unten:

$$-\epsilon_2 \vec{\nabla} \phi \Big|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{q'' d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \hat{e}_z - \frac{q'' \rho}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \hat{e}_\rho \right]$$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{dq}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} - \frac{dq'}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \right) \hat{e}_z - \left(\frac{\rho q}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} + \frac{\rho q'}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \right) \hat{e}_\rho = \frac{q'' d}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \hat{e}_z - \frac{q'' \rho}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \hat{e}_\rho$$

$$\Leftrightarrow (dq - dq') \hat{e}_z - (\rho q + \rho q') \hat{e}_\rho = dq'' \hat{e}_z - \rho q'' \hat{e}_\rho$$

$$\Leftrightarrow \hat{e}_z d(q - q') - \hat{e}_\rho \rho (q + q') = \hat{e}_z dq'' - \hat{e}_\rho \rho q''$$

$$\Rightarrow \underline{q - q' = q''}$$

$$(2) \quad (\epsilon_{\text{oben}} - \epsilon_{\text{unten}}) \times \hat{n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left(\frac{\rho q}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} + \frac{\rho q'}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \right) \hat{e}_\rho \times \hat{e}_z = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{q'' \rho}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^3} \hat{e}_\rho \times \hat{e}_z$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q''}$$

Daraus erhält man:

$$\frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} (q - q')$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{\epsilon_1} + \frac{q'}{\epsilon_1} = \frac{q}{\epsilon_2} - \frac{q'}{\epsilon_2}$$

$$\Leftrightarrow q' \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) = q \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right)$$

$$\Rightarrow q' = q \frac{\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right)}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}\right)} = q \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_1} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow q'' = q - q' = q - q \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} = q \left(1 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right) = q \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right) \\ = q \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right) \quad \checkmark$$

Damit ist

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (d-z)^2}} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d+z)^2}} \right), & z > 0 \\ \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (d-z)^2}} \right), & z < 0 \end{cases}$$

$$b) \quad \sigma_{\text{ges}} = -(\vec{P}_{\text{oben}} - \vec{P}_{\text{unten}}) \hat{n} \\ \vec{P}_{\text{oben}} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_{\text{oben}} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{\nabla} \phi|_{z=0^+} \\ \vec{P}_{\text{unten}} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_{\text{unten}} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{\nabla} \phi|_{z=0^-}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{ges}} = - \frac{q}{2\pi} \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}^3}$$

$$Q_{\text{ges}} = \int_A dA \sigma_{\text{ges}} = -q \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad \checkmark$$

20/20