Institut für Theoretische Festkörperphysik
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. M. Garst
Dr. J. Masell

Klassische Theoretische Physik III — Übungsblatt 14

Wintersemester 2024/2025

Link: https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_2494353
Abgabe: *Montag, 10.02.2025 um 14:00 Uhr via ILIAS*
Besprechung: *Mittwoch, 12.02.2025*

Hinweis: Benennen Sie Ihre Lösungen im Format „Blatt_14_uvwxy_Nachname.pdf", wobei uvwxy das Kürzel Ihres Anmeldenamens bei ILIAS ist.

1. Lorentz-Transformationen

10 + 10 + 10 = 30 Punkte

(a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Lorentz-Transformationen $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ die Identität

$$\Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = g_{\nu\sigma} \,.$$

erfüllen. Berechnen Sie die inverse Lorentz-Transformation $(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1}$ unter Verwendung dieser Beziehung und der Eigenschaft des metrischen Tensors $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$.

Kovariante Vektoren transformieren wie

$$V'_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu V_\mu \,.$$

Wie verhält sich $(\Lambda_\nu{}^\mu)$ zu $(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1}$?

(b) Eine Lorentz-Transformation $(\Lambda(\beta,\theta)^\mu{}_\nu)$ bestehe aus einem Boost entlang der x-Achse mit Geschwindigkeit βc gefolgt von einer Rotation um die x-Achse mit Winkel θ. Sie lässt sich als folgende Matrix darstellen

$$(\Lambda(\beta,\theta)^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ,$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ist. Berechnen Sie anhand Ihres Ergebnisses aus Teil (a) die inverse Matrix $(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1}$. Lässt sie sich auch in der Form $\Lambda(\beta',\theta')$ darstellen und falls ja, wie verhalten sich β' und θ' zu β und θ?

Betrachten Sie auch die Matrix $(\Lambda_\mu{}^\nu)$ und die transponierte Matrix $(\Lambda^\nu{}_\mu)$. Wie unterscheiden sich diese von $(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1}$?

(c) Zwei der oben definierten Lorentz-Transformation mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten $\beta_1 c$, $\beta_2 c$ sowie unterschiedlichen Drehwinkeln θ_1, θ_2 werden hintereinander ausgeführt. Das Ergebnis ist wieder eine Lorentz-Transformation der gleichen Form

$$\Lambda(\beta_1,\theta_1)^\mu{}_\nu \Lambda(\beta_2,\theta_2)^\nu{}_\rho = \Lambda(f(\beta_1,\beta_2), g(\theta_1,\theta_2))^\mu{}_\rho \,.$$

Bestimmen Sie die Funktionen f und g.

2. Feldstärketensor und Transformation der Felder

10 + 10 + 15 + 10 = 45 Punkte

In der Vorlesung werden Sie den elektromagnetischen Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

kennenlernen, sowie den dualen Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \ ,$$

wobei das Levi-Civita-Symbol $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ im Falls, dass $\mu\nu\rho\sigma$ eine gerade Permutationen von 0123 ist, 1 ist, bei ungerade Permutationen -1 und sonst 0.

(a) Benutzen Sie die Beziehung zwischen A_μ und $\boldsymbol{E}$ bzw. $\boldsymbol{B}$, um $F_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ durch das elektrische und magnetische Feld auszudrücken.

(b) Berechnen Sie die Größen $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ ausgedrückt in $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$.

(c) Da $F^{\mu\nu}$ ein kontravarianter Tensor ist, gilt unter einer Lorentz-Transformation Λ

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}.$$

Führen Sie explizit die Lorentz-Transformation in ein entlang der z-Achse bewegtes Bezugssystem durch mit der Darstellung

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Identifizieren Sie in $F'^{\mu\nu}$ die neuen Felder $\boldsymbol{E}'$ und $\boldsymbol{B}'$. Leiten Sie daraus den Zusammenhang

$$\begin{aligned} E'_z &= E_z \ , & E'_{x,y} &= \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_{x,y} \ , \\ B'_z &= B_z \ , & B'_{x,y} &= \gamma(\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E})_{x,y} \end{aligned}$$

her, wobei hier $\boldsymbol{v} = \beta c \hat{e}_z$ ist.

(d) Eine Punktladung q ruhe im Ursprung im Bezugssystem K, $\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r})$. Bestimmen Sie die Felder $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}', t')$ und $\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r}', t')$ im entlang der z-Achse bewegten Bezugssystem K', indem Sie die Transformationsregeln aus dem vorherigen Aufgabenteil auf das Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ im System K anwenden.

3. Stromdurchflossener Draht

5 + 10 + 10 = 25 Punkte

Betrachten Sie einen unendlich langen, stromdurchflossenen Draht. Im Ruhesystem des Drahtes K sei der Draht elektrisch neutral und die Stromdichte sei $\boldsymbol{j} = I\hat{e}_z\delta(x)\delta(y)$.

(a) Nutzen Sie aus, dass $(j^\mu) = (c\rho, \boldsymbol{j})$ ein kontravarianter Vektor ist und bestimmen Sie j'^μ in einem mit Geschwindigkeit v entlang der z-Achse bewegten Bezugssystem K'. Die Transformationsmatrix ist identisch zu Gleichung (1).

Sie stellen fest, dass Sie nun eine nicht verschwindende Ladungsdichte erhalten. Interpretieren Sie ihr Ergebnis im Bezug auf Längenkontraktion.

(b) Bestimmen Sie die Felder $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}')$ und $\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r}')$ im Bezugssystem K' aus j'^μ mit Hilfe der Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik.

(c) Eine Testladung q bewege sich aus K betrachtet mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_q = v_q\hat{e}_z$ parallel zum Draht im Abstand d. Sie unterliegt der Lorentz-Kraft

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_q \times \boldsymbol{B}\right) \ .$$

Berechnen Sie die Lorentz-Kraft F', die auf die Testladung in einem mit Geschwindigkeit v entlang der z-Achse bewegten Bezugssystem K' wirkt. Betrachten Sie die Fälle $v = 0$ und $v = v_q$.

Gibt es ein Bezugssystem, in dem die Kraft verschwindet? Falls ja, mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich dieses System relativ zu K?

Hinweis: Da es sich um eine Testladung handelt, müssen Sie das von der Ladung erzeugte Feld und daraus resultierende Effekte *nicht* beachten.