Übungsblatt 0

Ausgabe: 26 Oktober 2025
Abgabefrist: 2 November 2025

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. `Blatt0_Einstein.pdf`).

Aufgabe 1 – Indexschreibweise [30 Punkte]

Vektoridentitäten lassen sich viel einfacher beweisen, wenn man die Indexschreibweise benutzt: Statt $\vec{v}$ schreibt man v^i oder v_i, wobei $i \in \{1, 2, 3\}$. Wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert, zum Beispiel

$$a^i b^i = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i = \vec{a} \cdot \vec{b}\,, \qquad a^i B^{ij} c^j = \sum_{i,j=1}^{3} a^i B^{ij} c^j = \vec{a}^{\intercal} B \vec{c}. \tag{1.1}$$

Es dürfen in keinem Term mehr als zwei gleiche Indizes vorkommen: $a^i b^i c^i$ ist undefiniert. Wir benutzen auch das Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j\,, \end{cases} \tag{1.2}$$

das Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{kij} = \varepsilon^{jki} = -\varepsilon^{ikj} = -\varepsilon^{jik} = -\varepsilon^{kji}\,, \qquad \varepsilon^{123} = 1\,, \tag{1.3}$$

und die folgende Notation:

$$\vec{r} = (x, y, z)\,, \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \tag{1.4}$$

$$\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\,, \qquad \nabla^2 = \partial_i \partial^i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}\,, \tag{1.5}$$

$$\textbf{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}\,, \qquad \textbf{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}\,, \qquad (\vec{a} \times \vec{b})^i = \varepsilon^{ijk} a^j b^k\,. \tag{1.6}$$

A) **[10 Punkte]** Überprüfen Sie die folgenden Identitäten (wir unterscheiden nicht zwischen oberen und unteren Indizes):

A.1) $\delta^{ii} = 3$,

A.2) $\partial_i r^j = \delta^{ij}$,

A.3) $\varepsilon^{ijm} \varepsilon^{klm} = \delta^{ik} \delta^{jl} - \delta^{il} \delta^{jk}$,

A.4) $\varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jkl} = 2\delta^{ij}$,

A.5) $\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ijk} = 3!\,$.

B) **[10 Punkte]** Überprüfen Sie die folgenden Identitäten:

B.1) $\vec{\nabla} r = \vec{r}/r$,

B.2) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$,

B.3) $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, wobei $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$ und $f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.

C) **[10 Punkte]** Wenn $\phi(\vec{x})$ ein Skalarfeld und $\vec{V}(\vec{x}) = (V_x(\vec{x}), V_y(\vec{x}), V_z(\vec{x}))$ ein Vektorfeld ist, überprüfen Sie die folgenden Identitäten:

C.1) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$,

C.2) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$,

C.3) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$.

Aufgabe 2 – Zylindrische Koordinaten [30 Punkte]

Manchmal benutzen wir anstatt den kartesischen Koordinaten (x, y, z) die zylindrischen Koordinaten (ρ, ϕ, z)

$$x = \rho \cos\phi\,, \qquad y = \rho \sin\phi\,, \qquad z = z\,. \tag{2.1}$$

Die Basisvektoren in diesen Koordinaten sind

$$\vec{e}_i(\vec{r}) = \mathbf{norm}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r^i}\right)\,, \qquad \text{for } i \in \{\rho, \phi, z\}\,, \text{ where } \mathbf{norm}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\,, \tag{2.2}$$

und hängen vom Punkt $\vec{r}$ im Raum ab.

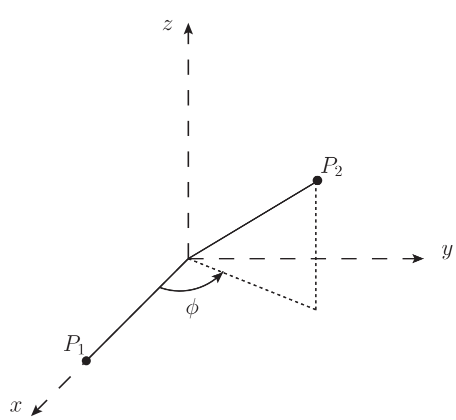

Figure 2.1: Zylindrische Koordinaten.

A) **[10 Punkte]** Kopieren Sie die Abbildung 2.1 und skizzieren Sie die Basisvektoren $\vec{e}_i, i \in \{\rho, \phi, z\}$ an den Punkten P_1 und P_2.

B) **[10 Punkte]** Drucken Sie die zylindrischen Basisvektoren $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ in Bezug auf den kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ aus, und umgekehrt. Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung, dass die Basisvektoren $\vec{e}_i, i \in \{\rho, \phi, z\}$ orthonormal sind: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.

C) **[10 Punkte]** Berechnen Sie $\partial_i \vec{e}_j$ für $i, j \in \{\rho, \phi, z\}$.

Aufgabe 3 – Delta-Distribution [40 Punkte]

Die *Delta-Distribution* δ ist durch ihre Wirkung auf eine glatte Testfunktion f definiert

$$\int \mathrm{d}x\, \delta(x) f(x) = f(0)\,. \tag{3.1}$$

Die Delta-Distribution δ kann als ein unendlich schmaler und hoher Peak mit dem Integral $\int \delta(x)\mathrm{d}x = 1$ aufgefasst werden:

$$\delta = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon\,, \qquad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\,. \tag{3.2}$$

Streng genommen existiert dieser Limes nicht als Grenzwert von Funktionen, und die δ-Distribution ist keine Funktion, sondern vielmehr ein stetiges lineares Funktional definiert auf dem Raum der Testfunktionen. Die Limitdarstellung kann verwendet werden, um verschiedene Operationen auf der δ-Funktion zu definieren. Zum Beispiel wird die Ableitung δ' der Delta-Distribution definiert durch

$$\int \mathrm{d}x\, \delta'(x) f(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\int \mathrm{d}x\, \delta'_\epsilon(x) f(x) = -\lim_{\epsilon\to 0}\int \mathrm{d}x\, \delta_\epsilon(x) f'(x) = -\int \mathrm{d}x\, \delta(x) f'(x) = -f'(0)\,. \tag{3.3}$$

Überprüfen Sie die folgenden Identitäten, indem Sie beide Seiten mit einer Testfunktion g integrieren:

A) **[5 Punkte]** $\delta(-x) = \delta(x)$,

B) **[5 Punkte]** $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$,

C) **[5 Punkte]** $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$ for $a \neq 0$,

D) **[5 Punkte]** $\delta'(-x) = -\delta'(x)$,

E) **[5 Punkte]** $\theta'(x) = \delta(x)$,

F) **[5 Punkte]** $f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x)$,

G) **[5 Punkte]** $\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a)+\delta(x+a)}{2|a|}$ für $a \neq 0$,

H) **[5 Punkte]** $\delta(f(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}$ für jede stetig differenzierbare Funktion f mit n Nullstellen bei $x = x_1, \dots, x_n$, so dass ihre Ableitung an diesen Punkten nicht verschwindet, d.h., $|f'(x_k)| > 0$.