

Übungsblatt 1

Ausgabe: 2 November 2025
Abgabefrist: 9 November 2025

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. Blatt1_Einstein.pdf).

Aufgabe 1 – Vektoridentitäten

[10 Punkte]

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für eine beliebige, aber differenzierbare Funktion $f = f(x, y, z)$ und die Vektorfelder $\vec{a}(x, y, z)$ und $\vec{b}(x, y, z)$:

- A) [2 Punkte] $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{a}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{a} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$,
- B) [2 Punkte] $\vec{\nabla} \times (f \vec{a}) = \vec{\nabla} f \times \vec{a} + f \vec{\nabla} \times \vec{a}$,
- C) [3 Punkte] $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$,
- D) [3 Punkte] $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}$.

Aufgabe 2 – Fluss durch einen Zylinder

[30 Punkte]

Betrachten Sie einen Zylinder mit Radius R , dessen Grundflächen in $z = z_1$ und $z = z_2 > z_1$ zentriert sind. Weiterhin gibt es einen Fluss durch den Zylinder, der durch das Vektorfeld $\vec{A} = xz \vec{e}_x + yz \vec{e}_y + (x^2 + y^2) \vec{e}_z$ beschrieben wird.

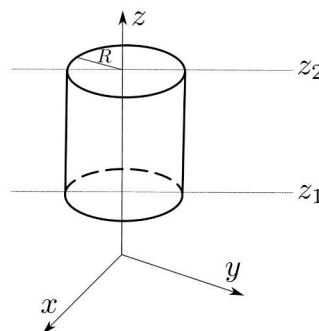


Abbildung 2.1:

- A) [5 Punkte] Schreiben Sie den Ausdruck des Feldes in Zylinderkoordinaten um und zeigen Sie, dass

$$\vec{A} = \rho z \vec{e}_\rho + \rho^2 \vec{e}_z. \quad (2.1)$$

- B) [10 Punkte] Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche $\int_{\partial \text{Zylinder}} d\vec{S} \cdot \vec{A}$.

- C) [10 Punkte] Berechnen Sie die Divergenz von \vec{A} und integrieren Sie sie über das Volumen des Zylinders.
 [Hinweis: Die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ lässt sich in kartesischen Koordinaten leicht berechnen.]
- D) [5 Punkte] Sind die Ergebnisse in Teil B) und C) gleich? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

Aufgabe 3 – Unendliche Ebene

[30 Punkte]

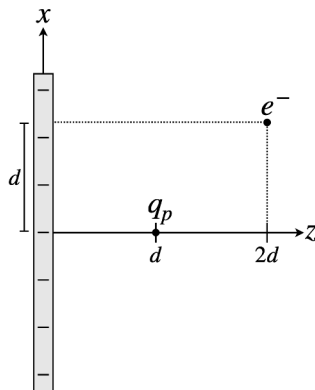


Abbildung 3.1: Ansicht in der xz -Ebene.

Eine unendliche Ebene, die durch den Ursprung verläuft und in der xy -Ebene liegt, trägt eine gleichmäßige Flächenladungsdichte von $\sigma = -3.0 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Ein Proton (Masse $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, Ladung $q_p = +1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$) befindet sich anfangs in Ruhe am Punkt $P = (0, 0, d)$ mit $d = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

- A) [5 Punkte] Bestimmen Sie Betrag und Richtung der auf das Proton wirkenden Kraft sowie die daraus resultierende Beschleunigung.
- B) Nehmen wir nun an, dass das Proton zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ mit $v_0 > 0$ besitzt.
- B.1) [5 Punkte] Geben Sie eine qualitative Beschreibung der Bahn des Protons.
- B.2) [5 Punkte] Bestimmen Sie die parametrischen Gleichungen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ der Bewegung entlang der x - und y -Achsen parallel zur Ebene sowie entlang der z -Achse senkrecht zur Ebene.
- C) Nehmen wir nun an, dass $\vec{v}_0 = 0$ ist. Am Punkt $P' = (d, 0, 2d)$ wird ein Elektron (Ladung $q_{e^-} = -1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$) platziert, während sich am Punkt P'' ein zweites Teilchen mit unbekannter Ladung Q befindet. Es wird angenommen, dass beide Teilchen an P' bzw. P'' fixiert sind und sich daher nicht bewegen.
- C.1) [5 Punkte] Auf wie viele mögliche Weisen kann die Position P'' gewählt werden, sodass die Gesamtkraft auf das Proton null ist? Hängt dies vom Vorzeichen von Q ab?
- C.2) [10 Punkte] Bestimmen Sie die Koordinaten von P'' als Funktion von Q . Zeigen Sie,

dass sie in der Form $P'' = (m(z - d), 0, z)$ geschrieben werden können, wobei

$$z = d \left(1 \pm 2^{3/4} \sqrt{\frac{|Q \sin \theta|}{(m^2 + 1)|q_e|}} \right). \quad (3.1)$$

Bestimmen Sie, welche der Plus- bzw. Minuslösungen $Q > 0$ bzw. $Q < 0$ entspricht. Hier ist θ der Winkel, den \vec{F}_{pQ} (die auf das Proton durch das Teilchen mit der Ladung Q wirkende Kraft) mit der positiven z -Achse in der xz -Ebene bildet, wobei z die Abszisse und x die Ordinate ist und $m = \tan \theta$ gilt.

Aufgabe 4 – Kugel mit Hohlraum

[30 Punkte]

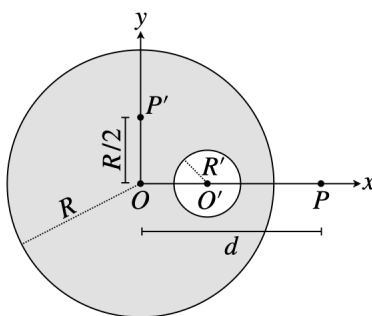


Abbildung 4.1: Kugel mit Hohlraum.

Eine Kugel mit Radius R , zentriert am Ursprung O , trägt eine gleichmäßige Volumenladungsdichte $\rho > 0$. Innerhalb dieser Kugel befindet sich ein kugelförmiger Hohlraum mit Radius $R' < R/2$, zentriert an einem Punkt O' , sodass $OO' = R/2$ (siehe Abbildung 4.1). Bestimmen Sie das elektrische Feld an den Punkten O , O' , P und P' , wobei $OP = d > R$ und $OP' = R/2$ (je [7.5 Punkte]).

[**Hinweis:** Verwenden Sie das Prinzip der Superposition der Ladungen mit einer positiven und einer negativen Kugel.]