Klassische Theoretische Physik III **WS 2025/26**

Prof. Dr. Kirill Melnikov Übungen: Dr. Ivan Novikov (ivan.novikov@kit.edu)

Übungsblatt 2

Ausgabe: 9 November 2025

Abgabefrist: 16 November 2025

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. `Blatt2_Einstein.pdf`).

Aufgabe 1 – Dipolpotential [40 Punkte]

Betrachten Sie die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{l}) - q\,\delta(\vec{r} + \vec{l})\,. \tag{1.1}$$

A) **[8 Punkte]** Berechnen Sie das Potential $\phi(\vec{r})$.

B) **[8 Punkte]** Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$.

C) **[8 Punkte]** Leiten Sie die führende (nicht verschwindende) Näherung für das Potenzial $\phi(\vec{r})$ weit entfernt von den Ladungen (d.h. im Grenzfall $\epsilon = |\vec{l}|/|\vec{r}| \ll 1$) her .

D) **[8 Punkte]** Leiten Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ weit entfernt von den Ladungen her .

E) **[8 Punkte]** Finden Sie einen Vektor $\vec{a}$, so dass die Ladungsverteilung $\rho_1(\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\delta(\vec{r})$ das gleiche Feld erzeugt wie ρ weit entfernt von den Ladungen .

Aufgabe 2 – Poisson-Gleichung in 2d [40 Punkte]

Die allgemeine Formel für das Potential eines Ladesystems

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\frac{\rho(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{r}|} \tag{2.1}$$

ergibt sich als Lösung der *Poisson-Gleichung*

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\,. \tag{2.2}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Poisson-Gleichung zu lösen und die Formel für das Potential herzuleiten, aber in zwei statt drei Dimensionen. Beginnen Sie mit einer Punktladung: $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$.

A) **[7 Punkte]** Das Potential einer Punktladung sollte rotationssymmetrisch sein, d.h. $\phi = \phi(r)$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Verwenden Sie dies, um $\nabla^2\phi(r)$ zu vereinfachen.

B) **[9 Punkte]** Für $r > 0$ gilt $\delta(r) = 0$ und die Poisson-Gleichung wird zu $\nabla^2\phi(r) = 0$. Lösen Sie diese Differentialgleichung, um das Potential für $r > 0$ (bis auf unbekannte Integrationskonstanten) zu bestimmen.

C) **[10 Punkte]** Integrieren Sie beide Seiten der Gleichung $\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r})$ über die Kreisscheibe $B_R = \{(x,y)|x^2 + y^2 < R^2\}$ für $R > 0$. Wenden Sie den Satz von Gauss an, um eine Seite der Gleichung auf ein Integral über den Kreis ∂B_R zu reduzieren. Berechnen Sie dieses Integral mithilfe der gefundenen Lösung für $\phi(r)$ im Bereich $r > 0$. Vergleichen Sie die beide Seiten der Gleichung, um eine Integrationskonstante zu bestimmen.

D) **[7 Punkte]** Leiten Sie das elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ her. Vergleichen Sie mit dem dreidimensionalen Coulomb-Gesetz

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\,. \tag{2.3}$$

E) **[7 Punkte]** Leiten Sie das zweidimensionale Äquivalent der Gl. (2.1) her.

Aufgabe 3 – Elektrostatischer Druck auf einer Sphäre [20 Punkte]

Betrachten Sie eine hohle Kugel mit Radius R, die gleichmäßig mit einer Gesamtladung Q geladen ist.

A) **[7 Punkte]** Bestimmen Sie das Potential ϕ und berechnen Sie die elektrostatische Energie mithilfe der Formel

$$U = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\rho(\vec{x})\phi(\vec{x})\,.$$

B) **[7 Punkte]** Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und berechnen Sie die elektrostatische Energie mithilfe der Formel

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\vec{E}^2(\vec{x})\,.$$

Erhalten Sie das gleiche Ergebnis? Warum oder warum nicht?

C) **[6 Punkte]** Berechnen Sie den Druck P auf der Oberfläche der Kugel aufgrund der elektrostatischen Abstoßung. Um ihn zu bestimmen, betrachten Sie, wie sich die Energie des Systems bei einer kleinen Änderung des Kugelradius $R \mapsto R + \mathrm{d}R$ verändert.