Übungsblatt 4

Ausgabe: 23 November 2025
Abgabefrist: 30 November 2025

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. `Blatt4_Einstein.pdf`).

Aufgabe 1 – Punktladungen in der Nähe einer leitenden Kugel [50 Punkte]

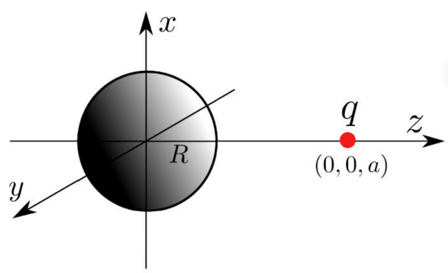

Abbildung 1.1: Ladung und leitende Kugel (rechts).

Eine leitende Kugel mit dem Radius R, zentriert am Ursprung des Koordinatensystems, wird auf null Potential gehalten. Eine Punktladung q wird in einem Abstand a vom Zentrum entlang der z-Achse platziert, wie in Abbildung 1.1 gezeigt.

A) **[15 Punkte]** Bestimmen Sie die auf die Ladung q wirkende Kraft.
[***Hinweis:*** *Verwenden Sie die Methode der Spiegelladungen und ersetzen Sie die Kugel durch eine Punktladung* q'.]

B) **[15 Punkte]** Bestimmen Sie die Oberflächenladungsdichte auf der Kugel als Funktion von θ.

C) **[20 Punkte]** Wiederholen Sie die Aufgabe für den Fall, dass die Kugel anfänglich ungeladen und elektrisch isoliert ist.
[***Hinweis:*** *Fügen Sie eine zweite Spiegelungsladung* q'' *in das Zentrum der Kugel ein.*]

Aufgabe 2 – Laplace-Gleichung in zylindrischen Koordinaten [50 Punkte]

Um das elektrostatische Potential φ und den Azimutwinkel ϕ in dieser Aufgabe nicht zu verwechseln, wird das Potential stattdessen mit $V \equiv \varphi$ bezeichnet.

Wir möchten die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 V = 0$$

mit beliebigen Randbedingungen lösen. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in Kugelkoordinaten die allgemeinste Lösung lautet

$$V(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) e^{\mathrm{i}m\phi} P_l^m(\cos\theta)\,.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, ein ähnliches Ergebnis in Zylinderkoordinaten (ρ,ϕ,z) herzuleiten, mit der zusätzlichen Annahme, dass das Potential nicht von der Koordinate z abhängt, d.h. $V = V(\rho,\phi)$.

In Zylinderkoordinaten nimmt die Laplace-Gleichung $\nabla^2 V = 0$ die folgende Form an

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}V\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = 0\,.$$

A) **[10 Punkte]** Beginnen Sie damit, nach Lösungen zu suchen, die die Variablen trennen:

$$V(\rho,\phi) = V_\rho(\rho)V_\phi(\phi)\,.$$

A priori gibt es keine Garantie, dass solche Lösungen existieren, aber wir werden sehen, dass es sie gibt. Vereinfachen Sie die Laplace-Gleichung und sammeln Sie alle Terme, die nur von ρ abhängen, auf der linken Seite, und alle Terme, die nur von ϕ abhängen, auf der rechten Seite der Gleichung. Dann müssen beide Seiten gleich einer reellen Konstanten c sein. Verwenden Sie diese Tatsache, um die Laplace-Gleichung als System zweier Differentialgleichungen umzuschreiben, jeweils in einer Variablen.

B) **[10 Punkte]** Lösen Sie die Differentialgleichung nach V_ϕ auf [***Hinweis:*** *Es handelt sich um die Gleichung eines harmonischen Oszillators.*] Die Funktion V_ϕ muss 2π-periodisch sein; verwenden Sie diese Tatsache, um zu zeigen, dass $c \propto m^2$ für $m \in \mathbb{Z}$.

C) **[10 Punkte]** Lösen Sie die Differentialgleichung nach V_ρ auf [***Hinweis:*** *Betrachten Sie die Fälle* $m = 0$ *und* $m \neq 0$ *getrennt, und suchen Sie für* $m \neq 0$ *nach Lösungen der Form* $V_\rho(\rho) = \rho^a$ *für eine Konstante* a]

D) **[5 Punkte]** Jede Lösung kann als folgende Summe geschrieben werden

$$V(\rho,\phi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j=1}^{2} c_{mij} V_\rho(\rho,m,i) V_\phi(\phi,m,j)\,,$$

wobei i,j die beiden linear unabhängigen Lösungen für V_ρ und V_ϕ bezeichnen, und c_{mji} Konstanten sind, die durch die Randbedingungen bestimmt werden. Überprüfen Sie, dass — bis auf eine Umdefinition der Konstanten — die allgemeine Lösung lautet

$$V(\rho,\phi) = A + B\ln\rho + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{\mathrm{i}m\phi}\left(C_m \rho^{-|m|} + D_m \rho^{|m|}\right).$$

E) **[15 Punkte]** Betrachten Sie als Randbedingung einen unendlichen Hohlzylinder mit dem Radius R und folgendem Potential auf seiner Oberfläche:

$$V(R,\phi) = V_0(\phi) = \sin\phi - \cos(2\phi)\,.$$

Bestimmen Sie das Potential V sowohl innerhalb als auch außerhalb des Zylinders. Verwenden Sie die Randbedingungen

$$\lim_{\rho \to \infty} V(\rho, \phi) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\rho \to 0} V(\rho, \phi) = \text{const.}$$