

Übungsblatt 5

Ausgabe: 30 November 2025
Abgabefrist: 7 Dezember 2025

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. Blatt5.Einstein.pdf).

Aufgabe 1 – Die leitende Box

[50 Punkte]

Betrachten Sie einen leeren rechteckigen leitenden Kasten mit den Abmessungen $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$. Alle Wände sind geerdet ($\varphi = 0$), außer der oberen Fläche bei $z = c$, die auf das Potential

$$\varphi(x, y, z = c) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)$$

gebracht wird.

- A) [5 Punkte] Verwenden Sie die Methode der Variablentrennung, um die Laplace-Gleichung für das Potential $\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ im Inneren des Kastens als ein System von drei Differentialgleichungen für $X(x)$, $Y(y)$ und $Z(z)$ umzuschreiben.
- B) [5 Punkte] Lösen Sie die drei Gleichungen für $X(x)$, $Y(y)$ und $Z(z)$ unter Verwendung der entsprechenden Randbedingungen. Für $Z(z)$ lösen Sie die Gleichung, indem Sie nur die Randbedingung bei $z = 0$ berücksichtigen.
- C) [10 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Form der Lösung $\varphi(x, y, z)$, die alle Randbedingungen erfüllt.
- D) [5 Punkte] Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ an einem beliebigen Punkt (x, y, z) im Inneren des Kastens.
- E) [15 Punkte] Bestimmen Sie die auf den Wänden des Leiters induzierte Oberflächenladungsdichte einschließlich ihres Vorzeichens.
- F) [10 Punkte] Bestimmen Sie die elektrostatische Energie im Inneren des Kastens.

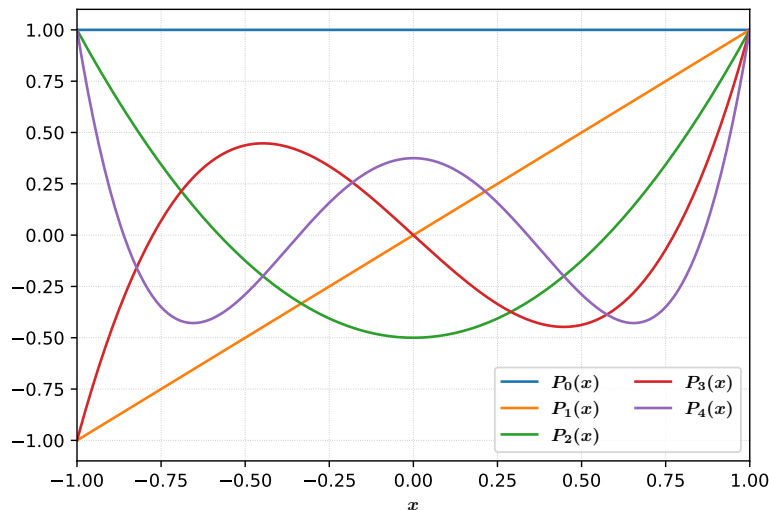


Abbildung 2.1: Die ersten fünf Legendre-Polynome.

Legendre-Polynome treten als Lösung der folgenden Differentialgleichung auf.

$$\partial_x [(1 - x^2)\partial_x P_n(x)] + n(n + 1)P_n(x) = 0, \quad (2.1)$$

ebenso wie in der Entwicklung der folgenden erzeugenden Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\epsilon + \epsilon^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\epsilon^n. \quad (2.2)$$

Sie können rekursiv mithilfe der *Bonnet-Formel* berechnet werden

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad (n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \text{for } n > 1, \quad (2.3)$$

oder explizit mithilfe der *Rodrigues-Formel*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \partial_x^n (x^2 - 1)^n. \quad (2.4)$$

Legendre-Polynome bilden eine orthogonale Basis im Raum der abschnittsweise stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$.

$$\int_{-1}^1 dx P_m(x)P_n(x) = \frac{2\delta_{mn}}{2n + 1}. \quad (2.5)$$

A) [10 Punkte] Unter Verwendung von Gl. (2.4) als Definition der Legendre-Polynome leiten Sie die folgende Formel her:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(n + k)!}{(k!)^2(n - k)!} \left(\frac{x - 1}{2}\right)^k. \quad (2.6)$$

[**Hinweis:** Bevor Sie die Ableitung bilden, schreiben Sie $(x^2 - 1)^n$ als $(x - 1)^n((x - 1) + 2)^n$, und entwickeln Sie anschließend $((x - 1) + 2)^n$ mittels der binomischen Reihe.]

- B) [10 Punkte] Überprüfen Sie, dass Legendre-Polynome tatsächlich Lösungen der Legendre-Differentialgleichung Gl. (2.1) sind.

[**Hinweis:** Verwenden Sie Gl. (2.6). Schreiben Sie vor der äußeren Ableitung den Term $(1 - x^2)$ als $-[(x - 1)^2 + 2(x - 1)]$.]

- C) [10 Punkte] Beweisen Sie die Rekursionsformel von Bonnet Gl. (2.3).

[**Hinweis:** Verwenden Sie Gl. (2.6), beginnen Sie bei der rechten Seite von (2.3) und versuchen Sie, die linke Seite zu erhalten. Bevor Sie $P_n(x)$ wie in Gl. (2.6) darstellen, schreiben Sie $xP_n(x)$ als $[2((x - 1)/2 + 1)P_n(x)]$.]

- D) [10 Punkte] Beweisen Sie die erzeugende-Funktion Gl. (2.2).

[**Hinweis:** Schreiben Sie die linke Seite von Gl. (2.2) als Reihe in ϵ mit unbekanntem Koeffizienten und zeigen Sie, dass diese Koeffizienten die Bonnet-Rekursion Gl. (2.3) erfüllen. Differenzieren Sie dazu nach ϵ , multiplizieren Sie mit $(1 - 2x\epsilon + \epsilon^2)$ und fassen Sie gleiche Potenzen von ϵ zusammen].

- E) [10 Punkte] Beweisen Sie die Orthogonalität der Legendre-Polynome, indem Sie Gl. (2.5) herleiten.

[**Hinweis:** Verwenden Sie die Rodrigues-Formel (2.4), nehmen Sie $m \leq n$ an und führen Sie n -mal partielle Integration durch. Zur Bestimmung der Normierung für $m = n$ verwenden Sie das Integral:

$$\int_{-1}^1 dx (1 - x^2)^n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}. \quad (2.7)$$

]