Übungsblatt 6

Ausgabe: 07 Dezember 2025
Abgabefrist: 14 Dezember 2025

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. `Blatt6_Einstein.pdf`).

Aufgabe 1 – Multipolentwicklung [45 Punkte]

A) **[10 Punkte]** Betrachten Sie eine Ladungsverteilung ρ, die in einer Region von typischer Größe a eingeschlossen ist. Zeigen Sie, dass das Potential φ weit entfernt von den Ladungen ($\epsilon = a/r \ll 1$) wie folgt angenähert werden kann:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{Q_{ij}r^i r^j}{2r^5} + \mathcal{O}(\epsilon^3)\right], \tag{1.1}$$

wobei

$$q = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r}), \qquad \vec{d} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\vec{r}, \qquad Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})(3r_ir_j - \delta_{ij}r^2) \tag{1.2}$$

die Gesamtladung, das Dipol- und das Quadrupolmoment sind.

B) **[10 Punkte]** Betrachten Sie eine Ladungsdichte ρ mit bekannten Momenten q, d, Q. Verschieben Sie alle Ladungen um den Vektor $\vec{b}$, sodass die neue Ladungsdichte $\rho'(\vec{r}) = \rho(\vec{r} - \vec{b})$ ist. Wie hängen die neuen Momente q', d', Q' mit den alten Momenten q, d, Q zusammen?

C) **[5 Punkte]** Berechnen Sie die Momente q, d, Q für die Ladungsdichte

$$\rho_1(\vec{r}) = q_1\left[\delta(\vec{r} - \vec{e}_x/2) + \delta(\vec{r} + \vec{e}_x/2) - \delta(\vec{r} - \vec{e}_y/2) - \delta(\vec{r} + \vec{e}_y/2)\right]. \tag{1.3}$$

D) **[10 Punkte]** Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ der Ladungsverteilung ρ_1 in großer Entfernung von den Ladungen.

E) **[10 Punkte]** Betrachten Sie ein Material, das aus Molekülen mit der Dichte n besteht, wobei jedes Molekül durch die Ladungsverteilung

$$\rho_2(\vec{r}) = \vec{r}\cdot\vec{a}\,e^{-\beta r}, \quad \beta > 0. \tag{1.4}$$

modelliert wird. Bestimmen Sie die Gesamtpolarisation $\vec{P}$ des Materials.

Aufgabe 2 – Auf ein flüssiges Dielektrikum wirkende Kraft **[55 Punkte]**

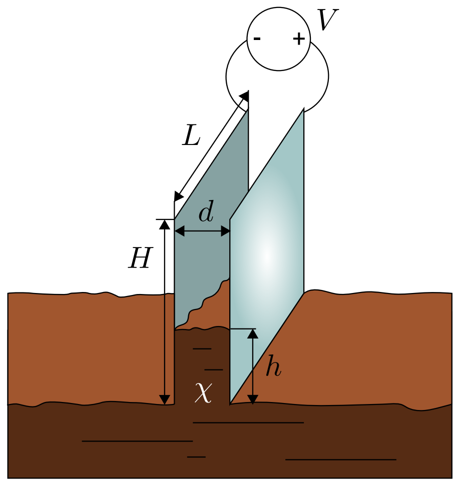

Abbildung 2.1: Plattenkondensator auf einem Becken mit dielektrischer Flüssigkeit.

Betrachten Sie einen Plattenkondensator, der sich über einem Becken mit dielektrischem Öl befindet, wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Die Platten des Kondensators sind leitend, und die Gesamtladung des Systems ist null. Die gegebenen Größen sind der Abstand d zwischen den Platten, die Höhe H und die Länge L des Kondensators, der Ölstand h, die Spannung V zwischen den Platten sowie die dielektrische Suszeptibilität $\chi > 0$ des Öls.

A) [**10 Punkte**] Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ im Kondensator innerhalb des Öls und außerhalb des Öls (weit entfernt von den Rändern der Platten). Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

B) [**10 Punkte**] Berechnen Sie die Flächenladungsdichte der freien Ladungen auf einer Platte des Kondensators im Bereich, der mit Öl gefüllt ist, und im Bereich außerhalb des Öls (ebenfalls weit entfernt von den Plattenrändern).

C) [**10 Punkte**] Berechnen Sie die Kapazität C. Wie hängt sie vom Ölstand h und von der dielektrischen Suszeptibilität χ ab?

D) [**10 Punkte**] Angenommen, der Kondensator ist von der Spannungsquelle getrennt, sodass die Ladung Q konstant ist, berechnen Sie die elektrostatische Kraft $\vec{F}$, die auf das dielektrische Öl wirkt. Was ist die Richtung dieser Kraft?
[***Hinweis:*** *Der Betrag dieser Kraft kann als* $|\vec{F}| = \left|\frac{\partial U}{\partial h}\right|$ *gefunden werden, wobei* U *die Energie des Kondensators ist*].

E) [**10 Punkte**] Berechnen Sie nun die Kraft $\vec{F}$, wenn der Kondensator stattdessen mit der Spannungsquelle verbunden ist, sodass die Spannung V konstant bleibt. Vergleichen Sie Betrag und Richtung der Kraft $\vec{F}$ mit dem vorherigen Fall.

F) [**5 Punkte**] Angenommen, dass die elektrostatischen und die Gravitationskräfte, die auf das Öl im Kondensator wirken, gleichen sich aus, bestimmen Sie die Massendichte ρ des Öls.