

Übungsblatt 7

Ausgabe: 14 Dezember 2025
Abgabefrist: 04 Januar 2026

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. Blatt7_Einstein.pdf).

Aufgabe 1 – Vektorpotential

[30 Punkte]

In der *Elektrostatik* haben Sie die Beziehung zwischen dem elektrischen Feld \vec{E} und dem zugehörigen skalaren Potential, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, gesehen. Im Fall der *Magnetostatik* haben wir ein Vektorpotential \vec{A} und seine Beziehung zum Magnetfeld, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

- A) [7.5 Punkte] Betrachten Sie ein Vektorpotential \vec{A} , das die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ erfüllt. Ändern Sie nun das Vektorpotential zu $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, wobei χ die Laplace-Gleichung erfüllt. Wird sich das erzeugte Magnetfeld ändern? Ist das neue Feld immer noch in der Coulomb-Eichung?
- B) [10 Punkte] Gehen Sie davon aus, dass $\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$ gilt. Zeigen Sie, dass dieses Magnetpotential \vec{B} erzeugt, wenn \vec{B} konstant ist, und dass es die Coulomb-Eichung erfüllt.
- C) [12.5 Punkte] Betrachten Sie die folgenden zwei Magnetpotenziale (in Zylinderkoordinaten), definiert für $\rho < R$:

$$\vec{A}_1 = A(\rho^2 - R^2) \vec{e}_z,$$

$$\vec{A}_2 = [A(\rho^2 - R^2) + f(z)] \vec{e}_z,$$

wobei f eine beliebige Funktion von z ist. Sind sie physikalisch äquivalent? Welche Stromdichtekonfiguration erzeugt sie?

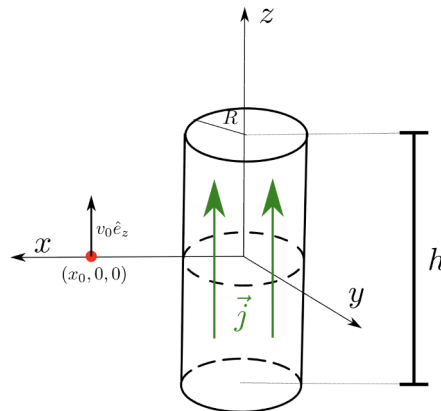


Abbildung 2.1: Zylinder mit Stromfluss \vec{j} und Testladung q an der Position $\vec{r} = x_0 \vec{e}_x$ und Geschwindigkeit $v_0 \vec{e}_z$.

Betrachten Sie einen leitenden Zylinder mit Radius R und Höhe h , wie in Abbildung 2.1. Die Konfiguration ist so, dass $h \gg R$ gilt und der Zylinder als unendlich lang angenähert werden kann. Der Zylinder wird von einem stationären Strom durchflossen. Die Stromdichte in jeder horizontalen Scheibe in Zylinderkoordinaten ist $\vec{j} = K \rho \vec{e}_z$.

- A) [5 Punkte] Wie groß ist der Gesamtstrom I , der den Zylinder durchfließt?
- B) [10 Punkte] Bestimmen Sie das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Zylinders unter Verwendung des Ampèreschen Gesetzes.
- C) [15 Punkte] Zeigen Sie, dass das Ergebnis aus Punkt B) durch die allgemeine Definition des Magnetfeldes erhalten werden kann

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} d^3\vec{r}_1. \tag{2.1}$$

Verwenden Sie das Integral

$$I(\phi, \rho, \rho_1) = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \frac{\rho - \rho_1 \cos(\phi - \phi_1)}{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\phi - \phi_1)} = \frac{2\pi}{\rho} \theta(\rho - \rho_1). \tag{2.2}$$

- D) [10 Punkte] Betrachten Sie eine Testladung außerhalb des Zylinders, die in der xz -Ebene liegt, mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(t = 0) = (0, 0, v_0)$ und der Anfangsposition $\vec{r}(t = 0) = (x_0, 0, 0)$. Schreiben Sie die Differentialgleichungen für die Komponenten von $\vec{r}(t)$ auf.
- E) [10 Punkte] Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für z umgeschrieben werden kann als

$$\frac{dz(t)}{dt} = A \log[x(t)] + c_1, \quad A = \frac{q\mu_0 K R^3}{3m}.$$

Bestimmen Sie c_1 aus den Anfangsbedingungen.

F) **[10 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für x umgeschrieben werden kann als

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{-A^2 \log^2(x/x_0) - 2Av_0 \log(x/x_0) + c_2}. \quad (2.3)$$

Bestimmen Sie c_2 aus den Anfangsbedingungen.

G) **[10 Punkte]** Wie groß wird der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}(t)|$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t sein? Warum ändert er sich nicht?