Übungsblatt 10

Ausgabe: 18 Januar 2026
Abgabefrist: 25 Januar 2026

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. `Blatt10_Einstein.pdf`).

Aufgabe 1 – Polarisation [30 Punkte]

Betrachten Sie eine ebene Welle, die eine Überlagerung zweier ebener Wellen ist,

$$\vec{E}_{12}(t,z) = \vec{E}_1(t,\vec{r}) + \vec{E}_2(t,\vec{r})\,, \quad \vec{E}_1(t,z) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_{1,0}\, e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right]\,, \quad \vec{E}_2(t,z) = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_{2,0}\, e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right]\,.$$

Die Wellen breiten sich in z-Richtung aus. Für gegebene komplexe Amplituden $\vec{E}_{1,0}$ und $\vec{E}_{2,0}$ bestimmen Sie die Art der Polarisation der Welle $\vec{E}_{12}$ (linear, zirkular oder elliptisch). Im Fall linearer Polarisation berechnen Sie die Polarisationsrichtung. Im Fall zirkularer Polarisation berechnen Sie die Helizität. Skizzieren Sie die Form, die der Vektor $\vec{E}_{12}$ in der xy-Ebene im Laufe der Zeit beschreibt (bei einer beliebigen fest gewählten Koordinate z). Für zirkulare und elliptische Polarisation zeichnen Sie, in welche Richtung sich der Vektor $\vec{E}_{12}$ dreht, und identifizieren Sie, ob die Polarisation rechts- oder linkshändig ist.
[***Hinweis:*** *Die Polarisation heißt rechtshändig, wenn sich aus Sicht der Quelle das elektrische Feld im Uhrzeigersinn dreht, und linkshändig, wenn es sich gegen den Uhrzeigersinn dreht*].
Betrachten Sie Amplituden mit den folgenden (x, y)-Komponenten:

A) **[6 Punkte]** $\vec{E}_{1,0} = (2,0)\,, \vec{E}_{2,0} = (0,1)\,.$

B) **[6 Punkte]** $\vec{E}_{1,0} = (1,0)\,, \vec{E}_{2,0} = (0,\mathrm{i})\,.$

C) **[6 Punkte]** $\vec{E}_{1,0} = (\mathrm{i},1)\,, \vec{E}_{2,0} = (1,\mathrm{i})\,.$

D) **[6 Punkte]** $\vec{E}_{1,0} = (1,-\mathrm{i})\,, \vec{E}_{2,0} = (1+2\mathrm{i},-1)\,.$

E) **[6 Punkte]** $\vec{E}_{1,0} = (1,-\mathrm{i})\,, \vec{E}_{2,0} = (1,1)\,.$

Aufgabe 2 – Elektromagnetische Kugelwelle [70 Punkte]

In der Vorlesung haben wir ebene Wellenlösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum diskutiert. In dieser Aufgabe werden wir ein Beispiel einer anderen Art von Lösung untersuchen, nämlich eine Kugelwelle

$$\varphi = 0\,, \qquad A^i = A_0 \,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r^2}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr}\right)(\delta^{iy}x - \delta^{ix}y)\right], \tag{2.1}$$

wobei φ und $\vec{A} = A^i\vec{e}_i$ das elektrische und das Vektor-Potentials sind; A_0 eine reelle Konstante ist, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $k = \omega/c$ und $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

A) **[5 Punkte]** Handelt es sich um eine monochromatische Welle?

B) **[5 Punkte]** Überprüfen Sie, dass dieses Potential die Lorentz-Eichbedingung erfüllt.

C) **[5 Punkte]** Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$.

D) **[5 Punkte]** Überprüfen Sie, dass die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ alle vier Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllen, unter der Annahme, dass das Vektorpotential die Wellengleichung $\left[c^{-2}\partial_t^2 - \nabla^2\right]\vec{A}$ erfüllt.

E) **[5 Punkte]** Sind die Vektoren $\vec{E}$ und $\vec{B}$ orthogonal?

F) **[10 Punkte]** Wie ist diese Welle polarisiert? Ist die Polarisation linear oder zirkular? Falls die Polarisation linear ist, bestimmen Sie die Polarisationsachse. Falls die Polarisation zirkular ist, geben Sie an, ob sie links- oder rechtshändig ist.

G) **[5 Punkte]** Berechnen Sie die elektrischen und magnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in führender Ordnung im kleinen Parameter $\epsilon = (kr)^{-1} \ll 1$.
[***Hinweis:*** *Bei der Berechnung von $\partial_i A^j$ in dieser Näherung wirkt die Ableitung nur auf $e^{\mathrm{i}kr}$. Es ist außerdem zweckmäßig, die Richtung des Ergebnisses in Kugelbasisvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ auszudrücken.*]

H) **[5 Punkte]** Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ in führender Ordnung in $\epsilon = (kr)^{-1} \ll 1$.

I) **[5 Punkte]** Skizzieren Sie das Strahlungsdiagramm, das darstellen soll, wie die abgestrahlte Leistung von der Richtung abhängt.

J) **[5 Punkte]** Berechnen Sie die Energiedichte w in führender Ordnung in $\epsilon = (kr)^{-1} \ll 1$. Zeigen Sie, dass in führender Ordnung in ϵ die folgende Identität gilt:

$$\vec{S} = c\,w\,\vec{e}_r\,. \tag{2.2}$$

K) **[5 Punkte]** Überprüfen Sie die Energieerhaltung in führender Ordnung in $\epsilon = (kr)^{-1} \ll 1$:

$$\partial_t w + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0\,. \tag{2.3}$$

L) **[5 Punkte]** Berechnen Sie die radialen Komponenten $\vec{e}_r \cdot \vec{E}$ und $\vec{e}_r \cdot \vec{B}$ der elektrischen und magnetischen Felder exakt, ohne anzunehmen, dass $1/(kr)$ klein ist. Sind die Vektoren $\vec{E}$ und $\vec{B}$ orthogonal zur Ausbreitungsrichtung?

M) **[5 Punkte]** Überprüfen Sie, dass das Vektorpotential in Gl. (2.1) tatsächlich die Wellengleichung $\left[c^{-2}\partial_t^2 - \nabla^2\right]\vec{A} = 0$ erfüllt.

[***Hinweis:*** *Zerlegen Sie $\vec{A}$ in einen radialen und einen sphärischen Anteil R und Φ:*

$$R(r) = \frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr}\right), \qquad \Phi^i(\theta,\phi) = \frac{\delta^{iy}x - \delta^{ix}y}{r} = \sin\theta e^i_\phi(\phi), \tag{2.4}$$

und verwenden Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left[\partial_r r^2\partial_r + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\partial_\phi^2\right] \tag{2.5}$$

sowie die Tatsache, dass $\partial_\phi^2\vec{e}_\phi = -\vec{e}_\phi$ und $\partial_r r^2\partial_r R(r) = \left[2 - (kr)^2\right]R(r)$ gilt.]