Übungsblatt 11

Ausgabe: 25 Januar 2026
Abgabefrist: 01 Februar 2026

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. `Blatt11_Einstein.pdf`).

Aufgabe 1 – Reflexions- und Transmissionskoeffizienten [45 Punkte]

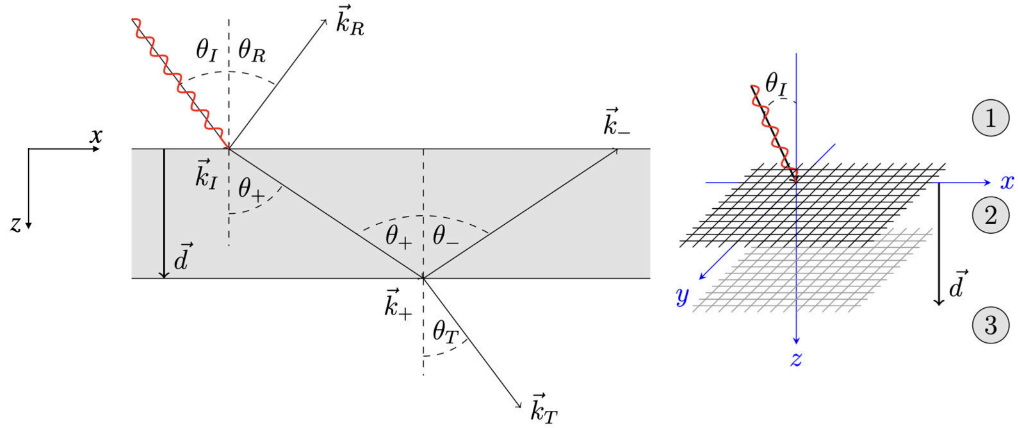

Abbildung 1.1: Ein Dielektrikum ist durch eine Luftschicht der Höhe d in zwei Bereiche unterteilt. Eine senkrecht polarisierte elektromagnetische Welle trifft unter dem Einfallswinkel θ_I auf die obere Grenzfläche. Der Brechungsindex in den Bereichen 1 und 3 ist n, während er in der Luftschicht $n = 1$ ist.

Eine monochromatische ebene Welle der Frequenz ω ist so polarisiert, dass das elektrische Feld parallel zur y-Richtung ist; ihr Wellenvektor $\vec{k}_\mathrm{I}$ liegt in der xz-Ebene und bildet mit der z-Richtung einen Winkel θ_I, wie in Abbildung 1.1 dargestellt. Bei $z = 0$ trifft sie unter dem Einfallswinkel θ_I auf eine Grenzfläche in der xy-Ebene. Unterhalb dieser Grenzfläche befindet sich eine Luftschicht der Höhe d. In den Bereichen $z < 0$ und $z > d$ befindet sich ein dielektrisches Medium mit Brechungsindex n. Die elektrischen Felder der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen in den Dielektrika seien durch $\vec{E}_\mathrm{I}$, $\vec{E}_\mathrm{R}$ und $\vec{E}_\mathrm{T}$ bezeichnet. Die einfallende und die reflektierte Welle an der unteren Grenzfläche werden durch $\vec{E}_+$ bzw. $\vec{E}_-$ bezeichnet.

A) **[15 Punkte]** Schreiben Sie die komplexwertigen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in den jeweiligen Bereichen auf und wenden Sie die Randbedingungen für die Felder an jeder Grenzfläche an. Beachten Sie, dass die Wellen beim Ausbreiten zwischen der oberen und der unteren Grenzfläche eine Phase φ erwerben. Erklären Sie deren Ursprung.

B) **[10 Punkte]** Stellen Sie mithilfe der Randbedingungen ein Gleichungssystem auf, das die verschiedenen Komponenten der elektrischen Felder $\vec{E}_a$, $a \in \{\mathrm{I}, \mathrm{R}, \mathrm{T}, +, -\}$, miteinander verknüpft.

C) **[10 Punkte]** Lösen Sie das Gleichungssystem aus Punkt B) nach $\vec{E}_{\mathrm{T}}$ und $\vec{E}_{\mathrm{R}}$ als Funktionen von $\vec{E}_{\mathrm{I}}$, n und θ_{I} auf. [***Hinweis:*** *Es kann hilfreich sein, die folgende Größe zu definieren:*

$$\alpha = n\frac{\cos\theta_{\mathrm{I}}}{\cos\theta_{+}} = n\frac{\cos\theta_{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta_{\mathrm{I}}}}\,. \tag{1.1}$$

]

D) **[10 Punkte]** Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R und T und überprüfen Sie schließlich, dass R + T = 1 gilt, unter der Annahme, dass θ_{I} kleiner als der kritische Winkel ist.

Aufgabe 2 – TM-Wellen in einem rechteckigen Wellenleiter [30 Punkte]

Betrachten Sie einen idealen rechteckigen Wellenleiter aus einem perfekten Leiter, dessen Achse entlang der z-Richtung verläuft. Der Querschnitt des Wellenleiters ist ein Rechteck in der xy-Ebene mit den Seitenlängen a entlang der x-Richtung und b entlang der y-Richtung. Eine Ecke des Rechtecks befindet sich im Ursprung. Monochromatische elektromagnetische Wellen breiten sich im Vakuum innerhalb des Wellenleiters aus, mit der Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ und der longitudinalen Abhängigkeit e^{ikz}.

A) **[5 Punkte]** Verwenden Sie die Randbedingungen für einen perfekten Leiter,

$$\vec{E}_{||} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{B}_{\perp} = 0 \quad \text{an den Wänden}\,, \tag{2.1}$$

und schreiben Sie explizit die Bedingungen auf, die von den Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder auf den Flächen $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ erfüllt werden müssen.

B) **[5 Punkte]** Betrachten Sie eine *transversal-magnetische* (TM) Lösung, für die

$$B_z = 0\,, \qquad E_z \neq 0\,. \tag{2.2}$$

Zeigen Sie, dass die longitudinale Komponente des elektrischen Feldes in der Form

$$E_z(x,y,z,t) = E_0(x,y)\, e^{ikz-i\omega t} \tag{2.3}$$

geschrieben werden kann, und bestimmen Sie, welche Gleichung $E_0(x,y)$ erfüllen muss.

C) **[10 Punkte]** Lösen Sie die in Punkt B) gefundene Gleichung mithilfe der Methode der getrennten Variablen und bestimmen Sie die allgemeine Form der Lösungen, die die Randbedingungen an den Wänden des Wellenleiters erfüllen.

D) **[5 Punkte]** Leiten Sie die *Dispersionsrelation* für TM-Wellen im Wellenleiter her (das heißt, bestimmen Sie die Wellenzahl k als Funktion von ω). Definieren Sie die Grenzfrequenz ω_{mn} für den TM_{mn}-Modus und diskutieren Sie die Bedingung, unter der sich die Welle entlang des Wellenleiters ausbreiten kann.

E) **[5 Punkte]** Bestimmen Sie, welcher TM-Modus die niedrigste Grenzfrequenz besitzt, und vergleichen Sie dieses Ergebnis qualitativ mit den in der Vorlesung behandelten *transversal-elektrischen* (TE) Moden.

Aufgabe 3 – Eindringtiefe **[25 Punkte]**

A) **[5 Punkte]** Zeigen Sie, dass die Eindringtiefe in einem schlechten Leiter ($\sigma \ll \omega\epsilon$) in erster Näherung unabhängig von der Frequenz ist. Wie groß ist die Eindringtiefe für reines Wasser? ($\sigma \approx 0.4 \cdot 10^{-5}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, $\epsilon \approx 81\epsilon_0$, $\mu \approx \mu_0$).

B) **[5 Punkte]** Bestimmen Sie die Eindringtiefe (in erster Näherung) in einem guten Leiter ($\sigma \gg \omega\epsilon$). Erklären Sie, warum Silber ($\sigma = 6.3 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$) für sichtbares Licht ($\omega \approx 10^{15}\,\mathrm{Hz}$) undurchsichtig ist. Nehmen Sie $\epsilon \approx \epsilon_0$ und $\mu \approx \mu_0$ an.

C) **[10 Punkte]** Bestimmen Sie das Verhältnis der zeitlich gemittelten Energiedichten des elektrischen und des magnetischen Feldes in Silber für grünes Licht ($\omega = 5.5 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$). Nehmen Sie $\epsilon \approx \epsilon_0$ und $\mu \approx \mu_0$ an.

D) **[5 Punkte]** Bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten für grünes Licht, das senkrecht auf eine Grenzfläche zwischen Luft und Silber trifft ($\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$). Beachten Sie, dass der Fresnel-Parameter

$$\beta = \frac{\mu_1 c}{\mu_2 \omega}\tilde{k}_2, \tag{3.1}$$

komplex ist, da die Wellenzahl $\tilde{k} = k + \mathrm{i}\kappa$ ist.