Übungsblatt 12

Ausgabe: 01 Februar 2026
Abgabefrist: 08 Februar 2026

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als PDF Datei auf ILIAS hoch und benennen Sie diese mit Ihrem Nachnamen (z.B. `Blatt12_Einstein.pdf`).

Aufgabe 1 – Rotierende Punktladung [30 Punkte]

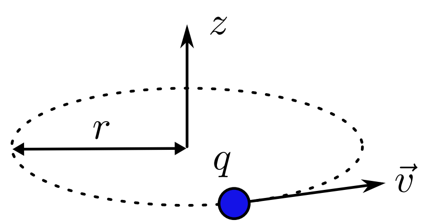

Abbildung 1.1: Punktladung auf Kreisbahn.

Ein Teilchen mit der Ladung q bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius r und konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$. Die Anfangsposition des Teilchens ist $\vec{r}(t=0) = r\,\vec{e}_x$. Um das Feld einer bewegten Ladung zu bestimmen, kann man die Liénard–Wiechert-Potentiale verwenden:

$$\varphi(t,\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})}\,, \qquad \vec{A}(t,\vec{r}_0) = \frac{\vec{\beta}}{c}\varphi(t,\vec{r}_0)\,, \tag{1.1}$$

wobei $\vec{R} = \vec{r}_0 - \vec{r}$, $R = |\vec{R}|$, $\vec{n} = \vec{R}/R$, $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ sind und $\vec{r}$ sowie $\vec{v}$ die Position und die Geschwindigkeit des Teilchens *zur retardierten Zeit* t_r bezeichnen, die durch die Gleichung

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}(t_\mathrm{r})| = c(t - t_\mathrm{r}) \tag{1.2}$$

definiert ist.

A) **[10 Punkte]** Bestimmen Sie die Potentiale φ und $\vec{A}$ auf der Rotationsachse als Funktionen der Zeit t und der Koordinate z.

B) **[10 Punkte]** Bestimmen Sie mithilfe der Potentiale φ und $\vec{A}$ die z-Komponente $E_z(t, z\vec{e}_z)$ des elektrischen Feldes auf der Rotationsachse.

C) **[10 Punkte]** Bestimmen Sie die elektrischen und magnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ im Zentrum des Kreises als Funktionen der Zeit t.
[***Hinweis:*** *Verwenden Sie die in der Vorlesung hergeleiteten Formeln:*

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}\left[\frac{1}{c^2R}\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\vec{a}] + \frac{1-\beta^2}{R^2}(\vec{n}-\vec{\beta})\right]\,, \qquad \vec{B} = \frac{\vec{n}}{c}\times\vec{E}\,,$$

wobei $\vec{a}$ die Beschleunigung des Teilchens zur retardierten Zeit ist.]

Aufgabe 2 – Planetenmodell des Atoms **[35 Punkte]**

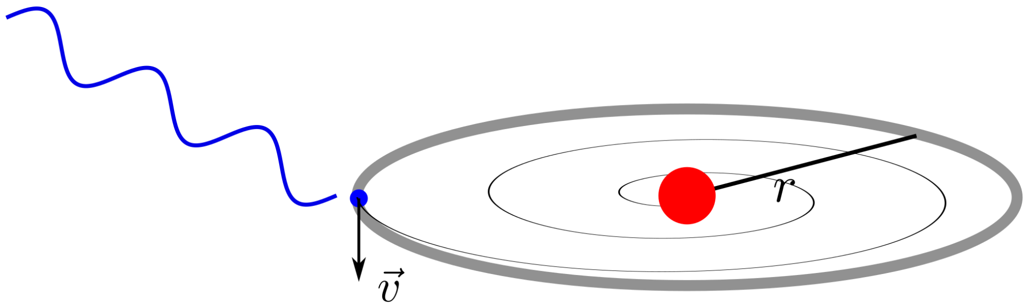

Abbildung 2.1: Planetenmodell des Wasserstoffatoms.

Im Planetenmodell des Wasserstoffatoms rotiert ein Elektron um das Proton wie ein Planet um einen Stern. Das Problem dieses Modells besteht darin, dass das Elektron aufgrund von Strahlung Energie verlieren würde. Das Proton ist wesentlich schwerer als das Elektron und wird als ruhend angenommen. Nehmen Sie an, dass die Bahn des Elektrons quasistationär und näherungsweise kreisförmig ist, mit einem Anfangsradius von $r_0 = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m (Bohr-Radius), und durch klassische nichtrelativistische Mechanik beschrieben wird. Das Elektron hat die Masse $m \approx 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg und die Ladung $q_\mathrm{e} = -e \approx -1.60 \cdot 10^{-19}$ C. Die elektrische Permittivität des Vakuums beträgt $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3}$, und die Lichtgeschwindigkeit ist $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

A) **[5 Punkte]** Bestimmen Sie die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und die Gesamtenergie des Elektrons als Funktion des Bahnradius.

B) **[10 Punkte]** Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit β_0 des Elektrons als Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit. Bei welchem Radius r_1 erreicht das Elektron die Geschwindigkeit $\beta_1 = 0.1$? Berechnen Sie r_1/r_0.

C) **[10 Punkte]** Leiten Sie unter Verwendung der Larmor-Formel

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}\,,$$

her, wie sich der Bahnradius im Laufe der Zeit ändert.

D) **[10 Punkte]** In welcher Zeit nimmt der Bahnradius von r_0 auf $r_2 = \alpha r_0$ mit $\alpha < 1$ ab? Berechnen Sie diese Zeit numerisch für beliebiges α.

Aufgabe 3 – Bremsstrahlung **[35 Punkte]**

Die folgende allgemeine Formel für die von einer relativistischen Punktladung abgestrahlte Leistung wurde in der Vorlesung hergeleitet:

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{\left|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]\right|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5} \, \mathrm{d}^2\Omega \, . \tag{3.1}$$

In dieser Aufgabe werden wir diese Formel im Spezialfall untersuchen, in dem die Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ und die Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$ der Ladung kollinear sind.

A) **[10 Punkte]** Vereinfachen Sie die Formel für $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}^2\Omega}$ in diesem Spezialfall. Drücken Sie das Ergebnis in Abhängigkeit vom Winkel θ zwischen der Abstrahlungsrichtung und der Geschwindigkeit der Ladung aus.

B) **[10 Punkte]** Wie groß ist die bei $\theta = 0$ abgestrahlte Leistung? Bei welchem Winkel θ_{M} ist die abgestrahlte Leistung maximal? Drücken Sie das Ergebnis als Formel für $\cos\theta_{\mathrm{M}}$ aus.

C) **[10 Punkte]** Entwickeln Sie das Ergebnis für $\cos\theta_{\mathrm{M}}$ im nichtrelativistischen Grenzfall in der kleinen Größe $\epsilon = \beta \ll 1$ und im ultrarelativistischen Grenzfall in der kleinen Größe $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2 = \epsilon \ll 1$. Vernachlässigen Sie in beiden Fällen Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ und höher. In welche Richtung ist die abgestrahlte Leistung in diesen Grenzfällen maximal?

D) **[5 Punkte]** Leiten Sie die gesamte abgestrahlte Leistung $\mathcal{P}$ durch Integration über die Richtungen $\mathrm{d}^2\Omega$ her. Verwenden Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \frac{1 - x^2}{(1 - ax)^5} = \frac{4}{3(1 - a^2)^3} \, .$$

Diskutieren Sie, was im nichtrelativistischen und im ultrarelativistischen Grenzfall geschieht.