Universität Karlsruhe SS 2005
Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. J.H. Kühn, Dr. A. Kulesza
http://www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

Zweite Klausur zur Theorie D (QM I)

16.07.2005

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein eigenhändig beidseitig beschriebenes Blatt (DIN A4) zugelassen.
- Verwenden Sie nur das von den Tutoren zur Verfügung gestellte Papier und für jede der 5 Aufgaben ein neues Blatt.
- Beschriften Sie jedes dieser Blätter mit:
  Namen, Matrikelnummer, Gruppennummer, Aufgabennummer.
  Nur vollständig beschriftete Blätter werden bewertet.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Keine langen Rechnungen erforderlich!

(a) Drei Operatoren A_1, A_2, A_3 erfüllen die Vertauschungsrelationen $[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k$. Welches sind die möglichen Eigenwerte von $(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$ und A_1?

(b) Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung eines Teilchens mit der Ladung q und der Masse m bei Anwesenheit eines (skalaren) Potentials $V(\vec{r})$ und eines Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$?

(c) Geben Sie für $\Psi_1 = f(\theta,\phi)e^{ikr}/r$ sowie für $\Psi_2 = f(\theta,\phi)\sin(kr)/r$ die radiale Komponente der Stromdichte an ($r > 0$).

(d) Der differentielle elastische Wirkungsquerschnitt sei $d\sigma/d\Omega = 3\sigma_{el}\cos^2\theta/(4\pi)$. Welche Streuphasen δ_l sind ungleich null? Berechnen Sie diese als Funktion von σ_{el} und k.

(e) Für ein vorgegebenes Problem seien die Streulösungen zum Drehimpuls $l = 0, 1, 2$ für sehr große r gegeben durch $R(kr)_{l=0} \sim R(kr)_{l=1} \sim R(kr)_{l=2} \sim \cos(kr)/(kr)$. Geben Sie eine untere Schranke für den elastischen Wirkungsquerschnitt an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Geben Sie eine Darstellung der Funktionen $r^l Y_l^m(\theta,\phi)$ für $l = 0, 1$ und $m = 0, \pm 1$ in den kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

an.

(b) Die Wellenfunktion eines Teilchens mit der Energie E in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(r)$ sei

$$\psi(\vec{x}) = (x + iy + 2z)\frac{f(r)}{r^2}\,.$$

(i) Ist ψ eine Eigenfunktion von L^2? Falls ja, welches ist der entsprechende Wert für l? Falls nein, welches sind die möglichen $l-$Werte bei einer Messung von L^2?

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, das Teilchen in Zuständen zu verschiedenen m_l zu finden.

(iii) Bestimmen Sie nun das Potential $V(r)$ aus $f(r)$ und seinen Ableitungen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens der Masse m und der Energie $E = k^2\hbar^2/(2m)$, $E > 0$ an einem kugelsymmetrischen Potential ($V_0 > 0$)

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

für gegebenes R.

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ in erster Bornscher Näherung und zeigen Sie, dass er für $kR \ll 1$ winkelunabhängig wird.

(b) Berechnen Sie nun die Streulösung $u_l(r)$ für Drehimpuls $l = 0$ für den Fall

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}.$$

Welche Randbedingung erfüllt $u_l(r)$ bei $r = R$. Was ergibt sich für die Streuphase?

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (15 Punkte)

(a) (i) Drücken Sie den Ortsoperator X sowie den Impulsoperator P beim eindimensionalen harmonischen Oszillator mit

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

durch den Erzeugungs- und den Vernichtungsoperator $a^\dagger$, bzw. a aus.

(ii) Berechnen Sie für die Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ die folgenden Matrixelemente (m, n beliebig):

$$\langle m|P|n\rangle, \quad \langle m|P^2|n\rangle.$$

(b) Zur Zeit $t = 0$ sei der folgende kohärente Zustand gegeben:

$$|\phi_\alpha(t)\rangle\Big|_{t=0} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha a^\dagger\right)^n}{n!} |0\rangle.$$

(i) Wie lautet $|\phi_\alpha(t)\rangle$ für $t \neq 0$?

(ii) Zeigen Sie, dass $|\phi_\alpha(t)\rangle$ für alle Zeiten t Eigenzustand des Vernichtungsoperators a ist, und bestimmen Sie den Eigenwert.

(iii) Was erhalten Sie für den Erwartungswert $\langle \phi_\alpha(t)|P|\phi_\alpha(t)\rangle$ als Funktion der Zeit?

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Ein spinloses Teilchen befinde sich in einem Zentralpotential. In unserem Fall wollen wir für dieses Potential den dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz ω_0 betrachten. Die z-Komponente L_z des Drehimpulsoperators vertauscht natürlich mit dem Hamiltonoperator H.

(a) Was sind die möglichen Eigenwerte des zugehörigen Hamiltonoperators H?

(b) Wir legen nun von außen zusätzlich ein (schwaches) homogenes Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ an. Geben Sie ein Vektorpotential $\vec{A}$ an, aus welchem Sie $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ erhalten. Wie lautet der Hamiltonoperator H' für dieses System? Zeigen Sie, dass H' auf folgende Form gebracht werden kann:

$$H' = H + \omega_L L_z,$$

wenn man Terme der Ordnung $\mathcal{O}(B^2)$ vernachlässigt. Was ergibt sich für den Koeffizienten ω_L?

(c) Was sind die möglichen Eigenwerte von H'?

Hinweise:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \\
Y_1^{\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}
\end{aligned}$$