Lösungen zur II. Klausur in Theorie D (Quantenmechanik I)

Aufgabe 1 (15 P.)

Teil (a) (2 P.)

Die Komponenten des Operators $\vec{A}$ genügen den gleichen Vertauschungsrelationen, wie die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{J}$ (mit $\hbar = 1$).
Daher erhält man in Analogie zum Drehimpuls für die Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right)|\Psi\rangle =& a(a+1)|\Psi\rangle \\ & \underline{a = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots}\end{aligned}$$

Bzw. für A_1:

$$\begin{aligned}A_1|\Psi\rangle =& a_1|\Psi\rangle \\ & \underline{a_1 = -a, -a+1, \ldots, a}\,.\end{aligned}$$

Teil (b) (2 P.)

Die zeitabhängige Schrödingergleichung eines Teilchens mit der Ladung q und der Masse m bei Anwesenheit eines (skalaren) Potentials $V(\vec{r})$ und eines Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ lautet:

$$\underline{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \left(\frac{1}{2m}\left(\vec{P} - q\vec{A}(\vec{r})\right)^2 + V(\vec{r})\right)|\Psi(t)\rangle}\,.$$

Teil (c) (3 P.)

Für die Stromdichte gilt:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left[\Psi^*(\vec{r})\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\Psi(\vec{r})\right]\,.$$

Für den ∇-Operator in Kugelkoordinaten gilt:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\,.$$

Für $\Psi_1(\vec{r}) = f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$ erhält man dann:

$$\begin{aligned}\vec{j}_1(\vec{r}) &= \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left[|f(\theta,\phi)|^2\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,\frac{\hbar}{i}\,\frac{ikr\,e^{ikr} - e^{ikr}}{r^2}\vec{e}_r + \ldots\vec{e}_\theta + \ldots\vec{e}_\phi\right] \\ &= \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left[|f(\theta,\phi)|^2\,\hbar\frac{rk+i}{r^3}\vec{e}_r + \ldots\vec{e}_\theta + \ldots\vec{e}_\phi\right]\end{aligned}$$

und damit für die Stromdichte:

$$\underline{j_{1,r}(\vec{r}) = \frac{\hbar k}{mr^2} |f(\theta,\phi)|^2} \,.$$

Ebenso erhält man für $\Psi_2(\vec{r}) = f(\theta,\phi)\frac{\sin(kr)}{r}$:

$$\vec{j}_2(\vec{r}) = \frac{1}{m} \operatorname{Re}\left[|f(\theta,\phi)|^2 \frac{\sin(kr)}{r} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin(kr)}{r}\right)\right] = 0 \,.$$

Da es keinen Realteil gibt, gilt für die Stromdichte:

$$\underline{j_{2,r} = 0} \,.$$

Teil (d) (4 P.)

Für den differentiellen elastischen Wirkungsquerschnitt gilt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 3\sigma_{el}\frac{\cos^2\theta}{4\pi} = \sigma_{el}\left(Y_1^0\right)^2$$

und da $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\sum_{l=0}^{\infty} f_l(\theta=0) Y_l^0(\theta)|^2$ ist, folgt, dass nur $\underline{\delta_1 \neq 0}$ ist.

Wenn nur $l = 1$ Wellen beitragen, gilt:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l = \frac{4\pi}{k^2} 3\sin^2\delta_1 \,.$$

Der totale Wirkungsquerschnitt σ kann explizit aus der Form, die in der Aufgabenstellung angegeben ist, berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{3\sigma_{el}}{4\pi}\int d\Omega \cos^2\theta = \frac{3\sigma_{el}}{4\pi} 2\pi \int d\theta \sin\theta\cos^2\theta \\
&= \frac{3}{2}\sigma_{el}\int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{3}{2}\sigma_{el}\frac{2}{3} = \sigma_{el} \,.
\end{aligned}$$

Als Konsequenz ergibt sich:

$$\sin^2\delta_1 = \frac{k^2\sigma_{el}}{12\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\delta_1 = \arcsin\sqrt{\frac{k^2\sigma_{el}}{12\pi}}} \,.$$

Teil (e) (4 P.)

Unter Verwendung der Formel für Partial-Wellen:

$$u_l(kr) = kr\, R_l(kr) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$$

und mit der Kenntnis, dass für $l = 0, 1, 2$

$$R_{l=0}(kr) \sim R_{l=1}(kr) \sim R_{l=2}(kr) \sim \frac{\cos(kr)}{kr}$$

gilt, kann man die Gleichung schreiben als:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \sin\left(kr + \delta_0\right) \sim \cos(kr) & &\Rightarrow \delta_0 = \pm\frac{\pi}{2} \\
u_1 &= \sin\left(kr - \frac{\pi}{2} + \delta_1\right) \sim \cos(kr) & &\Rightarrow \delta_1 = 0, \pi \\
u_2 &= \sin\left(kr - \pi + \delta_2\right) \sim \cos(kr) & &\Rightarrow \delta_2 = \pm\frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}
$$

(Man beachte, dass hier die Konvention $-\pi < \delta_l \leq \pi$ benutzt wurde.)
Dann ergibt sich für den totalen Wirkungsquerschnitt σ und dessen untere Schranke:

$$
\begin{aligned}
\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \geq & \frac{4\pi}{k^2}\left(\sin^2\delta_0 + 3\sin^2\delta_1 + 5\sin^2\delta_2\right) \\
= & \frac{4\pi}{k^2}(1+0+5) = \underline{\frac{24\pi}{k^2}}\ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (10 P.)

Teil (a) (2 P.)

Für die Kugelflächenfunktionen gilt:

$$
\begin{aligned}
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\ , \\
Y_1^{\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}\ , \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\ .
\end{aligned}
$$

Da folgende Beziehungen gelten:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{z}{r}\ , \\
r\sin\theta\, e^{\pm i\phi} &= r\sin\theta\big(\cos\phi \pm i\sin\phi\big) = x \pm iy\ ,
\end{aligned}
$$

erhält man in kartesischen Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
&\underline{Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}}\ , \\
&\underline{rY_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(x \pm iy\right)}\ , \\
&\underline{rY_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, z}\ .
\end{aligned}
$$

Teil (b) (8 P.)

Teil (i) (2 P.)

Aus Aufgabenteil (a) ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}) &= (x+iy+2z)\frac{f(r)}{r^2} = \left(\frac{x+iy}{r} + 2\frac{z}{r}\right)\frac{f(r)}{r} \\ &= \left(2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0 - \sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^1\right)\frac{f(r)}{r} \\ &= R(r)G(\Omega)\ ,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}R(r) &= \frac{f(r)}{r}\ , \\ G(\Omega) &= 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0(\Omega) - \sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^1(\Omega)\ .\end{aligned}$$

Da für den quadrierten Drehimpulsoperator gilt:

$$L^2 Y_l^m(\Omega) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\Omega)\ ,$$

erhält man

$$L^2\Psi(\vec{r}) = R(r)\left(2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}2\hbar^2 Y_1^0 - \sqrt{\frac{8\pi}{3}}2\hbar^2 Y_1^1\right) = 2\hbar^2\Psi(\vec{r})$$

und

$$\underline{l=1}\ .$$

Teil (ii) (3 P.)

Im Allgemeinen kann die Wellenfunktion $\Psi(\vec{r})$ geschrieben werden als

$$\Psi(\vec{r}) = R(r)G(\Omega) = \sum_l \sum_m a_{lm}(r) Y_l^m(\theta,\phi)$$

mit den Entwicklungkoeffizienten

$$a_{lm}(r) = \int d\Omega\, Y_l^{m\,*}(\theta,\phi)\Psi(r,\theta,\phi)\ .$$

Die Wahrscheinlichkeit den Zustand $|l,m\rangle$ zu finden ist dann gegeben durch:

$$P(m) = \sum_{l\geq m}\int dr\, r^2\, |a_{lm}|^2\ .$$

Im Speziellen gilt für die Beiträge $l=1,\ m=0$ und $l=1,\ m=1$:

$$\begin{aligned}a_{10} &= R(r)2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\ , \\ a_{11} &= -R(r)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
P(m=0) &= \int dr\, r^2\, |R(r)|^2\, \frac{16\pi}{3}\ , \\
P(m=1) &= \int dr\, r^2\, |R(r)|^2\, \frac{8\pi}{3}\ , \\
P(m=-1) &= 0\ .
\end{aligned}
$$

Löst man das Gleichungssystem

$$
\begin{cases} P(m=0)/P(m=1) = 2\ , \\ P(m=0) + P(m=1) = 1\ , \end{cases}
$$

erhält man

$$
\underline{P(m=0) = \frac{2}{3}}\ , \qquad\qquad \underline{P(m=1) = \frac{1}{3}}\ .
$$

Teil (iii) **(3 P.)**

Das Potential lässt sich aus der Gleichung:

$$
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r}\,\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)\right]\Psi(\vec{r}) = E\,\Psi(\vec{r})
$$

bestimmen. Für $l = 1$ gilt für die Radialgleichung:

$$
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r}\,\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{\hbar^2}{mr^2} + V(r)\right]R(r) = E\,R(r)
$$

mit

$$
R(r) = \frac{1}{C}\,\frac{f(r)}{r}\ .
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{f''(r)}{r} + \frac{\hbar^2}{m}\,\frac{f(r)}{r^3} + V(r)\frac{f(r)}{r}\right] &= E\,\frac{f(r)}{r}\ , \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{\hbar^2}{mr^2} + V(r) &= E\ , \\
\underline{V(r) = E + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{f''(r)}{f(r)} - \frac{2}{r^2}\right)}\ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (10 P.)

Teil (a) (5 P.)

$$
V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{für } r \le R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}
$$

Für die Bornsche Näherung gilt:

$$f_k^B(\theta,\phi) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int d^3r' e^{-i\vec{q}\vec{r}'}V(r')\ ,$$

mit $\vec{q} \equiv \vec{k}_i - \vec{k}_d$, wobei der Vektor $\vec{k}_i = k\vec{e}_i$ in die Einfallsrichtung und der Vektor $\vec{k}_d = k\vec{e}_d$ in die Ausfallsrichtung zeigt.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f_k^B(\theta,\phi) &= -\frac{2mV_0}{4\pi\hbar^2}\int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-iqr'\cos\theta'} \\
&= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q}\int_0^R dr' r' \sin(qr') \\
&= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}\big(\sin(qR) - qR\cos(qR)\big)\ .
\end{aligned}$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt folgt dann:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f_k^B(\theta,\phi)\right|^2 = \underline{\frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4 q^6}\left(\sin(qR) - qR\cos(qR)\right)^2}\ .$$

Wenn $kR \ll 1$ ist, dann ist auch $qR \ll 1$. In diesem Grenzfall gilt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4 q^6}\Big(\underbrace{\sin(qR)}_{\approx qR - \frac{1}{6}(qR)^3} - qR\underbrace{\cos(qR)}_{\approx 1 - \frac{1}{2}(qR)^2}\Big)^2 \\
&\approx \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4 q^6}\left(\frac{q^3R^3}{3}\right)^2 = \underline{\frac{4m^2V_0^2}{9\hbar^4}R^6}\ .
\end{aligned}$$

Teil (b) (5 P.)

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r \le R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für l=0 gilt:

$$u_0(r) = \tilde{c}_k \sin(kr + \delta_0)\ .$$

Für die Randbedingung bei $r = R$ gilt:

$$\begin{aligned}
u_0(R) &= 0\ , \\
\tilde{c}_k \sin(kR - \delta_0) &= 0\ .
\end{aligned}$$

Hierdurch erhält man

$$\underline{\delta_0 = kR\ (\pm n\pi)}\ .$$

Aufgabe 4 (15 P.)

Teil (a) (6 P.)

Teil (i) (2 P.)

Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator gilt:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 \ .$$

Drückt man den Erzeugungsoperator $a^\dagger$ und den Vernichtungsoperator a durch die Operatoren X und P aus, so erhält man:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} + i\hat{P} \right) \ , \qquad \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \ ,$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{X} - i\hat{P} \right) \ , \qquad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \ .$$

Damit ergibt sich:

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a + a^\dagger \right) \ ,$$
$$\hat{P} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(a - a^\dagger \right)$$

und

$$\underline{X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a + a^\dagger \right) \ ,}$$

$$\underline{P = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(a - a^\dagger \right) \ .}$$

Teil (ii) (4 P.)

Wendet man den Erzeugungsoperator $a^\dagger$ und den Vernichtungsoperator a auf einen Energie-Eigenzustand an, so erhält man:

$$a|k\rangle = \sqrt{k}|k-1\rangle \ ,$$
$$a^\dagger|k\rangle = \sqrt{k+1}|k+1\rangle \ .$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned}
\langle m|\hat{P}|n\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\langle m|a|n\rangle - \langle m|a^\dagger|n\rangle\right] \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{n}\delta_{m,n-1} - \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}\right]
\end{aligned}$$

und

$$\underline{\langle m|P|n\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\left[\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} - \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right]} \ .$$

Da

$$\hat{P}^2 = \frac{1}{2}\left(aa^\dagger + a^\dagger a - aa - a^\dagger a^\dagger\right)$$

ist, kann analog der Erwartungswert $\langle m|\hat{P}^2|n\rangle$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\langle m|\hat{P}^2|n\rangle &= \frac{1}{2}\left[\langle m|aa^\dagger|n\rangle + \langle m|a^\dagger a|n\rangle - \langle m|aa|n\rangle - \langle m|a^\dagger a^\dagger|n\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(n+1)\delta_{m,n} + n\delta_{m,n} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} - \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(2n+1)\delta_{m,n} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} - \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2}\right] \ ,
\end{aligned}$$

und

$$\underline{\langle m|P^2|n\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}\left[(2n+1)\delta_{m,n} - \sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2} - \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2}\right]} \ .$$

Teil (b) (9 P.)

Teil (i) (3 P.)

Zunächst muss der Zustand $|\phi_\alpha(t)\rangle|_{t=0}$ durch Energie-Eigenzustände ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
|\phi_\alpha(t)\rangle\Big|_{t=0} &= c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha a^\dagger\right)^n}{n!}|0\rangle \\
&= c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\cdot\ldots\cdot 1\right)|n\rangle \\
&= c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \ .
\end{aligned}$$

[Bemerkung:

$$1 = \langle\phi_\alpha(t=0)|\phi_\alpha(t=0)\rangle = |c_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(|\alpha|^2\right)^n}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}$$

$$c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

]

Die Zeitentwicklung kann dann direkt bestimmt werden:

$$|\phi_\alpha(t)\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |n\rangle \ ,$$

mit den Energie-Eigenwerten:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \ ,$$

so dass

$$\underline{|\phi_\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle} \ .$$

In anderen Worten:

$$|\phi_\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} |\phi_{\alpha'(t)}\rangle \qquad \text{mit} \qquad \alpha'(t) = \alpha e^{-i\omega t} \ .$$

Teil (ii) **(3 P.)**

Zuerst überprüfen wir, ob es sich bei $\phi_\alpha(t)\rangle|_{t=0}$ in der Tat um einen kohärenten Zustand handelt:

$$\begin{aligned}
a|\phi_\alpha(t)\rangle\Big|_{t=0} &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} a|n\rangle \stackrel{a|0\rangle=0}{=} c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} a|n\rangle \\
&= c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}|n-1\rangle \\
&= \alpha c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\
&= \quad \alpha|\phi_\alpha(t)\rangle\Big|_{t=0} \ .
\end{aligned}$$

In gleicher Weise, wie im Fall $t = 0$, kann man diese Rechnung auch für eine beliebige Zeit t durchführen:

$$\begin{aligned}
\underline{a|\phi_\alpha(t)\rangle} &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} a|\phi_{\alpha'(t)}\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha'(t))^n}{\sqrt{n!}} a|n\rangle \\
&= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \alpha'(t)|\phi_{\alpha'(t)}\rangle = \underline{\alpha'(t)|\phi_\alpha(t)\rangle} \ .
\end{aligned}$$

Teil (iii) **(3 P.)**

Der Erwartungswert des Operators P bezüglich der Zustände $|\phi_\alpha(t)\rangle$ ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
\underline{\langle\phi_\alpha(t)|P|\phi_\alpha(t)\rangle} &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle\phi_\alpha(t)| \left(a^\dagger - a\right) |\phi_\alpha(t)\rangle \\
&= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \Big(\underbrace{\langle\phi_\alpha(t)|a^\dagger}_{\alpha'^*(t)\langle\phi_\alpha(t)|} |\phi_\alpha(t)\rangle - \langle\phi_\alpha(t)| \underbrace{a|\phi_\alpha(t)\rangle}_{\alpha'(t)|\phi_\alpha(t)\rangle} \Big) \\
&= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\alpha'^*(t) - \alpha'(t)\right) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(-2i\,\mathrm{Im}\big(\alpha'(t)\big)\right) \\
&\underline{= \sqrt{2m\hbar\omega}\,\mathrm{Im}\big(\alpha e^{i\omega t}\big)} \ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (10 P.)

Teil (a) (2 P.)

Für den Hamiltonoperator H eines spinlosen Teilchen im Zentralpotential eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz ω_0 gilt:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\vec{R}) \ , \qquad V(\vec{R}) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 R^2 \qquad \text{(Zentralpotential)} \ .$$

Die Energie-Eigenwerte können durch lösen der Schrödingergleichung in der $|r\rangle$-Darstellung (kartesische Koordinaten) gefunden werden:

$$H = H_x + H_y + H_z \ , \qquad H_i = \frac{P_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 R_i^2 \ ,$$

mit

$$H_i|n_i\rangle = (n_i + \frac{1}{2})\hbar\omega_0|n_i\rangle \ .$$

Dabei sind die Eigenzustände gegeben durch:

$$|n\rangle = |n_x, n_y, n_z\rangle = |n_x\rangle|n_y\rangle|n_z\rangle \ ,$$

so dass

$$H|n\rangle = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})\hbar\omega|n\rangle = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega|n\rangle$$

ist. Hierbei ist n definiert als $n \equiv n_x + n_y + n_z$, so dass dann $\underline{E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega}$ gilt.

Teil (b) (5 P.)

Das zusätzliche (schwache) homogene Magnetfeld $\vec{B}$ ist gegeben durch:

$$\vec{B} = (0, 0, B) \ .$$

Wählt man $\vec{A}$ durch $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}$, dann gilt $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$.
Mit dieser Wahl gilt für den Hamiltonoperator H':

$$H' = \frac{1}{2m}\left[\vec{P} - q\vec{A}\right]^2 + V(\vec{R}) \ .$$

Benutzt man $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{P} - q\vec{A}\right]^2 &= P^2 + \frac{1}{2}q\vec{P}\cdot(\vec{R}\times\vec{B}) + \frac{1}{2}q(\vec{R}\times\vec{B})\cdot\vec{P} + q^2A^2 = P^2 - 2q\vec{P}\cdot\vec{A} + q^2A^2 \\
&= P^2 + q\vec{P}\cdot(\vec{R}\times\vec{B}) + \frac{1}{4}q^2(\vec{R}\times\vec{B})^2 \overset{\text{bis zu } \mathcal{O}(B^2)}{\approx} P^2 + q\vec{B}\cdot(\vec{P}\times\vec{R}) \\
&= P^2 - q\vec{B}\vec{L} \ .
\end{aligned}$$

Der Hamiltonoperator H' kann dann ausgedrückt werden als:

$$H' = \frac{1}{2m}P^2 + V(\vec{R}) - \frac{q}{2m}\vec{B}\vec{L} = H - \frac{q}{2m}BL_z = H + \omega_L L_z \ ,$$

mit $\underline{\omega_L = -\frac{q}{2m}B}$.

Teil (c) (3 P.)

Es gelten die Vertauschungsrelationen:

$$[H, L_z] = 0 \quad \Rightarrow [H', L_z] = 0 \ ,$$

so dass der Hamiltonoperator H' und der Hamiltonoperator H die gleichen Eigenzustände haben:

$$\underline{H'|n,l,m\rangle} = H|n,l,m\rangle + \omega_L L_z|n,l,m\rangle = \underline{\left[(n+\frac{3}{2})\hbar\omega_0 + m\hbar\omega_L\right]}|n,l,m\rangle \ .$$

Man beachte, dass gilt:

$$\begin{aligned} H|n,l,m\rangle &= H \sum_{\underbrace{n_x, n_y, n_z}_{n_x+n_y+n_z=n}} c_{n_x,n_y,n_z}|n_x,n_y,n_z\rangle \\ &= (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})\hbar\omega_0 \sum_{\underbrace{n_x, n_y, n_z}_{n_x+n_y+n_z=n}} c_{n_x,n_y,n_z}|n_x,n_y,n_z\rangle \\ &= (n + \frac{3}{2})\hbar\omega_0|n,l,m\rangle \ . \end{aligned}$$